Mathématiques colonne 5

積み木パズル

西山　豊

ジェンガ(Jenga)というテーブルゲームがある．54個の均一な直方体のパーツを組んで作ったタワーから，崩さないように注意しながら一個を抜き取り，最上段に積みあげる動作を参加者が交互に行う．崩した者が負けというスリリングなゲームである．このゲームで使うパーツである小さな積み木(15ミリ×25ミリ×75ミリ)を用いた次のような問題を考えてみよう．

まず積み木を1個，机の上に置く．つぎに，その上に積み木を右側にずらして積む．さらに，その上に積み木を右側にずらして積む．このように，つぎつぎと右方向にずらして積んでいったとき，一番上の積み木の左端が，一番下の積み木の右端より右側に(外に)くることができるだろうか．つまり，一番上の積み木が完全に飛び出した積み方ができるだろうか．

私の数学の講義では積み木を用意して，学生にやらせている．よくある失敗のパターンは，3分の1右にずらして積み，その上にまた3分の1右にずらして積み，さらに3分の1右にずらして積もうとするが，ここで積み木は倒れてしまう．そこで，3分の1が大きすぎるのではと考えなおし，5分の1ずつ右にずらしてみるが積み木は多く使うが，一番下の積み木の右端をはみ出すことができない．そして，このような積み方は不可能であると学生は主張する．均等にずらして積むと必ず倒れることを証明するのはそれほど難しくない．

これは重心の計算問題である．いきなり答えを求めようとせず基本に戻って考えてみよう．まず2つから始めてみる．ずらせる距離が2分の1であることは直観でわかる．さて3つ目が問題である．3つ目の積み木を右手に持って考えてみよう．ほとんどの人はこの積み木を2つの上に積もうとするが，どうしても倒れてしまう．倒れるのが分かってもその上に置こうとするが，駄目であるならあきらめも大事で，違うアプローチを模索すべきである．

ここでヒントを与えよう．積み木は上に積むものですか？　このヒントに読者は戸惑うであろう．上が駄目なら横，横も駄目なら下，下といっても机の下となるが，どこに置いていいのか思案するだろう．3つ目の積み木は上に積むのではなく2つの積み木の下にすべり込ませるのだ．3つ目の積み木を一番下におき，上2つの関係を固定したまま徐々にずらしていけば，4分の1までずらすことができる．

以下，4つ目の積み木は6分の1ずらしてその下に置き，5つ目の積み木は8分の1ずらしてその下に置く．ずらした距離を足せば1を超える．

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{12+6+4+3}{24}=\frac{25}{24}>1$$

つまり，一番下の積み木と一番上の積み木は1個分以上ずらせて積めたことになる．

ずらす幅の1/2, 1/4, 1/6, …, $1/2n$ は調和数列という．「調和」の意味は，古代ギリシアのピタゴラス学派が和声の理論に使ったという由来がある．調和数列の合計を調和級数という．調和数列を積分するとlog関数になり，log関数は無限大に発散する．つまり積み木がいくらでもあれば，理論的には無限にずらして積めるのである．

積み木1個分ずらすには積み木5個が必要である．積み木2個分ずらすには32個が必要で，積み木3個分ずらすには228個もいることになる．理論上は無限大にずらすことができるが実際の積み木では2個ずらしが限界であろう．その積み方を横から眺めると，$y=\log x$ のグラフを時計回りに90度回転させ，y 軸に関して対称移動させた形になっている．

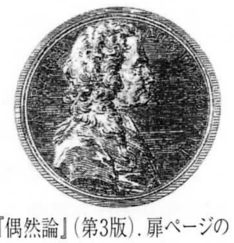
(にしやま　ゆたか／大阪経済大学)

● 入試問題小景 ⑯

n回の試行で勝ち目が連続してk回以上出る確率

(ド・モアブルの「連の長さ」の問題)

岸　吉堯



『偶然論』(第3版)，扉ページのアブラハム・ド・モアブルの肖像図

問題16　硬貨を n 回投げるなかで表が連続して k 回以上出る確率を $P_{n,k}$ とする．

(1)　$P_{3,2}$ および $P_{4,2}$ を求めよ．

(2)　$n=k+1$, …, $2k$ に対して $P_{n,k}-P_{n-1,k}$ を求めよ．

(3)　$P_{2k,k}$ を求めよ．

(名古屋大)

前回述べた，**ド・モアブル**(Abraham de Moivre. 1667－1754)の著書『偶然論』(第Ⅲ版．1756年)には全部で74個の問題が論及され，最後の問題は，「**連の長さ**」の問題で，ド・モアブルによってはじめて考えられた問題です．[註1] それは，

n 回の独立試行で，ある事象が r 回以上連続して起こる確率を求めよ．

と言うもので，ド・モアブルは証明抜きで解の求め方だけを示しました．

問題16は，この例題となることは明らかです．“ある事柄の連なり”を考える「**連」の問題**は，入試において文字a，bや数字0，1あるいは符号＋，－などを並べる順列の問題の中で，単語や信号などを構成する応用問題としてしばしば採用されています．

ただし，高校では術語の「連」の定義や性質は学ばないため入試では，用語の説明がされています．その一例を示すと，

何種類かの文字を1列に並べるとき，同じ文字の一続きを**連**といい，そこで続いた文字の個数を連の**長さ**という．

たとえば，4個の a と5個の b の順列 $bbabaabba$ や $abaabbabb$ では，長さが1の a の連が2個，長さが2の a の連が1個，長さが1の b の連が1個，長さ2の b の連が2個ある．したがって，この順列では，a の連の個数は3で，b の連の個数は3で，連の総数は6である．　(大阪女大)

ド・モアブルの連の問題の研究は，彼以後，イギリスのトマス・シンプソン(Thomas Simpson. 1710－1761)やフランスの**ピエール・シモン・ド・ラプラス**(Pierre Simon de Laplace. 1749－1827)に引き継がれました．シンプソンの場合は，大きな進展は見られず，ド・モアブルの再帰的な解法を発展させたのはラプラスで，ラプラスは1812年『確率の解析的理論』で理論化した母関数(または生成関数という)によって解決しました．

ここでは，ド・モアブルの再帰的な方法とラプラスが示した母関数との関連を述べてみよう．

1. ド・モアブルの再帰的な方法

「連」の定義は，前述の入試の説明で「文字」を一般的に「事象」と置き換え，問題は，

「1回の試行である事象が起きる確率は p である．$q=1-p$ とおく．n 回の独立試行でその事象の連の長さが r 以上である確率 P_n を求めよ．」

として考えます．

いま，k 回の試行で連の長さが r となる確率を u_r とすると，求める確率 P_n は

$$P_n=u_r+u_{r+1}+u_{r+2}+\cdots+u_n$$

ここで，

$$k<r\text{のとき，}\quad u_1=u_2=\cdots=u_{r-1}=0 \qquad (1)$$

$$k=r\text{のとき，}\quad u_r=P^r \qquad (2)$$