Mathématiques colonne 8

鉛筆考

西山　豊

鉛筆の断面は六角形である．では，なぜ六角形なのかと問えば，それほど深い根拠はない．強いて言うなら平面充填形と関連しているかもしれない．平面を正多角形で覆い尽くす問題を考えるとき，隙間なく埋め尽くせるのは正三角形，正方形，正六角形の三種類である．このうち，同一面積を囲む図形で周囲の長さが最小になるのは正六角形である．

1ダース＝12本の鉛筆を紙箱に詰めるには，正六角形であるのが最適だ．これはミツバチの巣房が正六角形であることとも関係する．平面充填形には正三角形と正方形もあり，断面が正三角形や正方形の鉛筆が売られたこともあったがあまり普及せず，正六角形のものが主流である．

鉛筆は削られていない部分で先端に近い部分を親指，人差し指，中指の三本の指で持つ．このとき，親指は人差し指に近い側の指の腹で，人差し指も指の腹で支え，中指は人差し指に近い側の側面で支える．持ちやすいかどうかは，平面充填形の問題ではなく，指に接触する面積をいかに大きくするかが問題となる．

五本指の位置関係を見ると，人差し指から小指までの四本は互いに平行で親指だけが別である．人差し指と中指は平行であるから，鉛筆の外角のひとつは90度でなければならない．正六角形の外角は120度であるから大きすぎて強く持つと負荷がかかり“ペンだこ”の原因となる．正方形の外角は90度でありフィットするが，もうひとつの親指の腹に正方形の角が当たってしまう．正三角形の外角は60度であり小さすぎる．では直角二等辺三角形ではと考えるが，芯の位置が問題となる．

鉛筆は1564年にイギリスのカンバーランド州のボローデルという谷から黒鉛が発見され，この黒鉛を木片にはさんで用いたのが黒鉛鉛筆の起源とされている．1795年にフランス人コンテは黒鉛と粘土を混ぜて焼いて作るという，現在と同じしくみの芯を開発した．日本では明治初期の1874年に，井口直樹が外国製鉛筆を見本にして手細工ではじめて鉛筆を作り，1887年には三菱鉛筆の始祖真崎仁六がはじめて工業化に成功した．その後明治末期から大正にかけて多数の工場が設立され，第一次世界大戦中および戦後にはドイツ鉛筆に代わって海外市場へ進出した．

赤鉛筆など色鉛筆の断面は円である．色鉛筆は絵画に使うことが多く，さまざまな持ち方をするため正六角形では角が邪魔になる．円の場合は机の上で転がりやすく，六角形の場合は転がらないという特徴がある．

さて，断面は正六角形が本当にいいのだろうか？

- 支えるのは三本の指である．
- 1つの外角は90度でなければならない．
- 接触面積を最大にする．

この条件を満たす断面を考えてみよう．正方形を対角線に沿って半分にしたもの（直角二等辺三角形）と，その対角線を直径とする半円を組み合わせる．半円半四角の扇形のような鉛筆というのはどうだろうか．人差し指と中指は90度でフィットし，親指の腹は半円の上なので指にやさしい．芯も中心を通っている．

画期的な鉛筆を発明したのでは，と鉛筆会社に試作品を添えて手紙を出したが（1978年），「鉛筆の芯は摩耗するので，軸の特定の側面を固定すると描線が太くなってしまう．それで鉛筆をときどき回し，紙面にあたる芯先の面を変えながら筆記しているので，どのように回転しても同じ握りごこちになるものが望ましい」ということだった．だったら，ボールペンの場合はどうかなどと発明への夢は続く．

（にしやま　ゆたか／大阪経済大学）

代数的グラフ理論入門

仁平　政一

グラフの固有値の性質といくつかのグラフのスペクトル

今回は，グラフの固有値の性質を調べその結果を利用していくつかのグラフ固有値を求める話です．面白い話でさらに行列式の計算も楽しむことができます．

2.1 グラフの固有値

位数pのグラフGの**固有値**とは，Gの隣接行列の固有値のことです（グラフや隣接行列の定義等に関しては前回を参照して下さい）．すなわち，Gの隣接行列をAとするとき，Gの固有値は，次のλに関する方程式のp個の解のことです．

$$det(\lambda I_p - A) = 0$$

ここに，$detA$は行列Aの行列式を意味し，I_pは$p\times p$単位行列を意味します．

λに関する多項式$det(\lambda I_p - A)$はGの**固有多項式**あるいは**特性多項式**といい，$\Phi(G;\lambda)$で表します．

グラフの異なるラベル付けに対して，互いに相似な隣接行列が得られますから，固有値はラベル付けによらず不変です．隣接行列の定義から

$$\Phi(G;\lambda)=\sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^{p-k}$$

と表されているとすると，明らかに$a_0=1$でその他のすべてのa_i $(1\leqq i\leqq p)$は整数です．ここで，具体例をあげておきましょう．

例1.1でのグラフP_3とK_4の固有値を，実際に求めてみましょう（図2.1参照）．

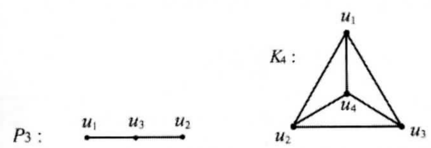

図2.1

例1.1から，それらの隣接行列はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{と} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となります．したがって，P_3の固有方程式は

$$\Phi(P_3;\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda$$

となります．また，K_4については

$$\Phi(K_4;\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

となりますから，これを計算することより（例えば，1列に2，3，4列を加えて$\lambda-3$をくくりだし，その後2，3，4行から1行を引くことより）

$$\Phi(K_4;\lambda)=(\lambda+1)^3(\lambda-3)$$

が得られます．

したがって，道P_3の固有値は$\sqrt{2}$，0，$-\sqrt{2}$で，完全グラフK_4の固有値は3，-1（3重解）であることがわかります．

グラフGの固有値をλ_1，λ_2，…，λ_k（$\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_k$）とし，それらの重複度をそれぞれ$m(\lambda_1)$，$m(\lambda_2)$，…，$m(\lambda_k)$とします．このとき，それを

$$Spec(G)=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

で表し，Gの**スペクトル**（*spectrum of G*）あるいは**スペクトラム**と言います．

例えば，