Mathématiques colonne 9

ジッヘルマン・ダイス

西山　豊

2つのサイコロを使った確率の問題がある．サイコロの目の和は1＋1の2から6＋6の12まで分布するが，これと同じ確率分布を持つサイコロが，普通のサイコロ以外にもうひと組あり，それは

1，3，4，5，6，8と1，2，2，3，3，4

である．このような奇妙なサイコロを考案したのは，ジョージ・ジッヘルマン(George Sicherman)という人で，1978年2月号のサイエンティフィック・アメリカン誌の19ページにM. ガードナーの紹介記事が掲載されている．

ウソだと思うなら検算してみよう．表計算ソフトを使って先頭行に1セルあけて1，3，4，5，6，8を入力し，左端の列に1セルあけて1，2，2，3，3，4を入力し，6×6のマス目に2つの数字の合計を計算してみる．そして，その値が2から12までの度数分布表を作ってみると，どうだろうか．普通のサイコロ2つの目の和の度数分布と奇妙なサイコロの度数分布が一致することに気付くであろう．

この組合せがユニークな解であることは，紙と鉛筆で証明することができる．紙と鉛筆では時間がかかるという人には，簡単なプログラムを作成して条件に一致する組合せを選び出すことができる．

また，サイコロは正6面体であるが，正多面体はこれ以外に正4面体，正8面体，正12面体，正20面体がある．これらもサイコロと考えた場合，同じような確率問題を設定することができる．プログラムを使えば，正8面体の場合は，つぎの3つの解がみつかる．

1，3，3，5，5，7，7，9と1，2，2，3，5，6，6，7
1，2，5，5，6，6，9，10と1，2，3，3，4，4，5，6
1，3，5，5，7，7，9，11と1，2，2，3，3，4，4，5

正4面体の場合は，1つの解がみつかる．

M. ガードナーの記事を読んだ読者から証明に関する手紙が彼のもとに届く．そのうちエレガントな解法はJ.A. ガリアンやD.M. ブロラインに代表される次の生成関数(多項式)

$$P(x)=\frac{1}{6}(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$$

を用いるものであった．項の数は全部で6個あるが，一般項 ax^k はサイコロの目の和が k となるのは a 個あると読む．次数は目の和に，係数は度数に対応している．

サイコロが2つだから，この多項式を自乗する．そして自乗した多項式を展開し，それを別の形で因数分解しなおすと次のようになる．

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$$
$$=(x+x^3+x^4+x^5+x^6+x^8)(x+2x^2+2x^3+x^4)$$

左辺が普通のサイコロが2個，右辺が奇妙なサイコロが2個の数字を表している．右辺の第一項から1，3，4，5，6，8の目を持つサイコロが，第二項から1，2，2，3，3，4の目を持つサイコロが計算される．多項式の因数分解を使えば，正12面体の場合の解が7個を見つけることができる．

先日，ダイスの考案者であるジョージ・ジッヘルマンさんからメールが届く．私の英語論文(Sicherman Dice)を偶然見つけたということで「サイコロは考案したが商品としては売り出していない．数社が私に連絡もなしで商品を売り出している」というコメントがあった．これは私の思い違いなので訂正の返事を出しておいた．奇妙なサイコロを考案する人がいれば，多項式を用いてエレガントな証明を与える人がいる．数学愛好家にとっては至福の時で，このようなことだけを考えていれば世界平和が実現できるのだが…

(にしやま　ゆたか／大阪経済大学)

ロジックの糸を解きほぐせ！(その1)
〜全単射のマトリックス〜

■連動 Flash コンテンツ ▶▶ http://www.gensu.co.jp/saito/puzzle/

1．定番(？)ロジックパズル

これから数回に渡って「論理パズル」というカテゴリーに当てはまるような問題を取り上げようと思います．そもそも本連載で扱う「数学パズル」はある意味全て「論理パズル」であるとも言えるのですが，ここでは，公務員試験や各種適性試験などで出題されるような，記号論理に焼き直して議論できる問題や，自己言及的な内容を含むパラドックスと隣り合わせの問題など，「論理」自体を考察の対象とするような問題群を考えます．

今回は，ペンシルパズルの世界では「ロジックパズル」というそのまんまの名前でも呼ばれることのある定番の形式の問題を取り上げます．ここでは，その内容に即して**属性推理パズル**という名前で呼ぶこととします．まずはその問題の例をみてみましょう．

■今月の問題

問題1　運動会の100m走の決勝は，阿部，石川，内田，遠藤，岡崎の5人の対決となりました．5人は，1番から5番までのゼッケンを重複しないようにつけて競技に臨み，同着でゴールした者はいなかったものとします．この決勝を見ていた人たちが，次のように話しています．

A：遠藤のゼッケンは4番だった．
B：2位は石川だった．
C：最下位の選手のゼッケンは3番だった．
D：ゼッケン1番の選手より前に少なくとも2人ゴールしていた．
E：阿部は1位の選手より大きい番号のゼッケンをつけていた．
F：ゼッケン2番の選手は1位ではなかった．
G：岡崎はゼッケン5番の選手より先にゴールした．

これらA〜Gの情報をもとに，内田の順位と，付けていたゼッケンを推理して下さい．

2．属性推理パズルの定式化

問題1では内田選手の順位とゼッケンの番号を問うていますが，それに解答するために行うのは，5人全員に「順位」と「ゼッケン番号」を条件に矛盾しないように割り振る作業です．その際に重要なのは，どの2人をとっても順位やゼッケン番号が重複せず，全員に割り振られる内容の集合が予めわかっているということです．そのことを踏まえ，このタイプの属性推理パズルを定式化してみます．

このパズルで扱う「順位が1位である」「ゼッケン番号が3番である」等は，この問題に登場する人物のうちの1人が持つ**性質**であると考えられますが，ここではさらに，性質を記述する要素のうち，「順位」や「ゼッケン番号」など，どういう切り口からみた性質であるかを特定する概念を**属性**と呼び，「1位」「3番」など，個々の人や物に対するその属性の内訳を**属性値**または単に**値**と呼ぶこととします．そのとき，**性質**は，(順位，1位)，(ゼッケン番号，3番)のように，属性と値の組で表すことができます．また，この問題では人物を「阿部」のような名前で表していますが，これも「名前」を属性，「阿部」を属性値とみなして，「(名前，阿部)という性質を持つ人物」という意味に解釈することができます．「阿部，石川，内田，遠藤，岡崎の5人」という記述により，名前に重複がないことが了解されているため，名前という属性が人物を特定するための識別子として機能し