標準的な問題であり，10 名の応募を頂きました．

応募者(敬称略)
小林幸夫，高村薫，大川聡，松田康雄，$e^{\pi i}$，朝倉崇之，樋口恒生，織田俊一，日塔祐治，G.T

変数変換 $\cos x=\sin(x+(\pi/2))$ (あるいは $\sin((\pi/2)-x)$) によって (1)，(2) の一方から他方へ容易に変換できますが，一応別に扱います．

解法 1 定跡ともいうべき置換 $t=\tan(x/2)$ を行えば，変換

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

により，以下のように計算できます (C は積分定数)．

$$\int\frac{1}{\sin x}\,dx=\int\frac{2}{2t}\,dt=\log|t|+C$$
$$=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C \qquad (1')$$

$$\int\frac{1}{\cos x}\,dx=\int\frac{2}{1-t^2}\,dt=\int\left[\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right]dt$$
$$=\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\log\left|\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}\right|+C \qquad (2')$$

通例 tan の加法定理により，(2′) の対数項を

$$\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

とまとめて表現しています．

解法 2 本文で (2) について述べた変換を行います．(1) についてだけ記述します ((2) も同様)．

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx \qquad (3)$$

ここで $\cos x=t$ と置換すれば，$\sin x dx=-dt$ として

$$(3)=\int\frac{-1}{1-t^2}\,dt=-\int\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right]dt$$
$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)+C \quad (4)$$

となります．最後の対数項を (1′) のように変形するのは倍角公式によって容易ですが，(4) の形のままのほうがかえって便利なこともあります．

以上が標準的ですが，その他の方法で注目に値するものをいくつか紹介します．

松田康雄氏の (1) に対する第 2 解：

$\sin x$ の倍角公式によって変形する．

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2)}$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)(1-\sin^2(x/2))}\,dx$$

ここで $x/2=t$ と置換すると，部分分数に分けて

$$=\int\left[\frac{\cos t}{\sin t}+\frac{\cos t}{2(1-\sin t)}-\frac{\cos t}{2(1+\sin t)}\right]dt$$
$$=\log|\sin t|-\frac{1}{2}\log(1-\sin t)-\frac{1}{2}\log(1+\sin t)+C$$
$$=\frac{1}{2}\log\frac{\sin^2 t}{(1-\sin t)(1+\sin t)}+C=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

(2) は $\cos x=\sin(x+\pi/2)$ で (1) に帰着させればよいが，朝倉崇之氏は (2) について直接に同様の変形を工夫していました．

高村薫氏の (2) に対する第 2 解：

本文で少し言及したように，分子の 1 を $\cos^2 x+\sin^2 x$ と変形し，$\cos x$ の積分は $\sin x$ とする．残りの部分は

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x}=\frac{\sin^2 x\cdot\cos x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x\cdot\cos x}{1-\sin^2 x}$$

と変形し，$\sin x=t$ と置換すると

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx=\int\frac{t^2}{1-t^2}\,dt$$
$$=\int\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)-1\right]dt$$
$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-t+C$$

となる．まとめて最後の答は次のようになる．

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)+C$$

結果的には解法 2 と本質的に同じことになりましたが，いろいろと工夫してみる価値があると思います．

1 月号の記事に関連して

不等式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}>e$ について 6 種類の証明が S.K.Khottri, Amer. Math. Monthly, 117 (2010), p.273–p.277 にあること，また

$$\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}=\exp\left[\int_0^1\frac{t^2}{(2n+1)^2-t^2}dt\right]>e^0=1$$

といった積分表示もできるという注意を頂きました．参考までに追加します．

(ひとつまつ しん／京都大学名誉教授)

数学を楽しむ

クルスカルの原理

西山 豊

1. 乱数を使った演出

イギリスの知人であるスティーブ・ハンブルから，アイルランドの数学教師を相手にした彼の講演を伝える Youtube が送られてきた．タイトルはランダムネス・ショーとなっていた．アイリッシュ・パブを会場にした数学の講演で，何やら楽しそうにしているのだが，英語がわからないので全容を理解するのに少し時間がかかった．

手順は次のようである．トランプを画用紙大のサイズに拡大コピーしたものを作っておく．会場から 8 人に協力してもらう．52 枚のカードを 8 人に 6〜7 枚ずつ配る．そして，床の上に図 1 のようにランダムに並べてもらう．トランプは 52 枚だから，横 8 列にすると縦 6 行となり，4 枚のカードが余るが，7 行目の左詰めに置くことにする．横 8 列に並んだ先頭行の前に 8 人に並んでもらう．1 番目の人はクラブの 9 (♣9) の前，2 番目の人はハートの 6 (♡6) の前，…，8 番目の人はダイヤの 5 (◇5) の前というように並ぶ．

さて，トランプの数字に従って移動することにする．1 行目は右方向に，2 行目は左方向にというように右左右左…のジグザグの 1 本道を進むことにする．たとえば，1 番目の人はクラブの 9 (♣9) であるから，右方向に 9 つ進むことにする．7 つ進んだところでカードがなくなるので，折り返して左方向に移動するとすれば，ダイヤの Q (◇Q) になる．ここで，ジャック (J) やクイーン (Q)，キング (K) の絵柄のカードは 1 つだけ進むこととする．それで，1 つ進んでダイヤの 9 (◇9) となる．このようにして，トランプに書かれた数字だけ進むことにすれば，

♣9，◇Q，◇9，♠3，♡4，♣8，
◇J，♣A，♠8，♣6，♡5

のような進み方をして，最下行 (7 行目) のハートの 5 (♡5) までたどり着くことになる．ハートの 5 (♡5) では 5 つ進むはずだが，カードが残り 1 枚しかないので，この位置にとどまっていることとする．

1	2	3	4	5	6	7	8
♣ 9	♡ 6	◇ A	♣ 4	♣ K	♡ 9	◇ 6	◇ 5
♡ Q	♣ 2	♣ 5	◇ 4	♣ J	◇ 9	◇ Q	♠ 4
♡ J	♣ Q	♠ 9	♠ 3	♠ 10	♠ 2	♡ 4	◇ 8
◇ 10	♠ 5	♠ J	♠ A	♡ 8	♣ 8	♣ 7	♠ Q
♣ 3	◇ 2	◇ J	♣ A	♠ 8	◇ 3	♡ 7	♠ 6
♡ K	♠ K	♡ 3	♣ 6	♡ A	♣ 10	♡ 2	◇ 7
◇ K	♡ 10	♡ 5	♠ 7				

図 1 8 枚のカードは同じカードにたどり着く

8 人の協力者に以上のルールを説明して，床に並べたカードの上を歩いてもらう．歩き出すのは，1 番目の人から始めるのではなく，8 番目の人から始め，次に 7 番目の人としたほうが，流れがスムーズになる．図 1 において，先頭行にいる 8 人を No.1〜No.8 として進むカードの位置を示すと次のようになる．

＊＊＊

No.1 ♣9 ◇Q ◇9 ♠3 ♡4 ♣8 ◇J ♣A ♠8 ♣6 ♡5
No.2 ♡6 ◇5 ◇4 ♡J ♣Q ♠9 ♡8 ♣A ♠8 ♣6 ♡5
No.3 ◇A ♣4 ◇5 ◇4 ♡J ♣Q ♠9 ♡8 ♣A ♠8 ♣6 ♡5
No.4 ♣4 ◇5 ◇4 ♡J ♣Q ♠9 ♡8 ♣A ♠8 ♣6 ♡5

No.5 ♣k♡9♣2♡J♣Q♠9♡8♣A♠8♣6♡5
No.6 ♡9♣2♡J♣Q♠9♡8♣A♠8♣6♡5
No.7 ◇6◇4♡J♣Q♠9♡8♣A♠8♣6♡5
No.8 ◇5◇4♡J♣Q♠9♡8♣A♠8♣6♡5

＊＊＊

8人は，最初はバラバラの位置にいるが，52枚のカードの上を歩き始めると，同じような経路をたどり，最後には8人全員がハートの5(♡5)に到達する．つまり，スタート時点では別々(他人)であったが最後は同じところに来る(新しい友達となる)．1枚のカードの上に8人がひしめき合っている光景はなかなか楽しそうだ．

We get new friends!

2. 93%の確率で同じカードにたどりつく

このように，同じカードにたどり着くのは偶然と思うかもしれないが，確率を計算してみると93%という高い確率でこの事象がおこることがわかる．読者はまずトランプでこの不思議な現象が起こることを確かめてから，確率を考えてみるとよい．

図1では，8人が同じカードにたどり着くことを示したが，8人全員とするとこの確率計算は少し複雑になるので，任意の2人が同じカードにたどり着く場合の確率を考えてみる．S.ハンブルによる計算方法をみてみよう[1]．最初に先頭行の1から8のどれかのカードの位置にいるので，進む数が1から8までであり，その平均は

$$m=(1+2+3+\cdots+8)/8=4.5$$

となる．

そして，その位置にあるカードの数にしたがって進む．数字が1なら1，数字が2なら2，数字が10なら10，絵札のジャック(J)とクイーン(Q)，そしてキング(K)は1つだけ進むので，平均して

$$m=(1+2+3+\cdots+10+1+1+1)/13=4.46$$

進むことになる．m の逆数をとって $p=\dfrac{1}{m}$ とする．p は平均の m だけ進む確率となる．この式の意味については後述する．

さて，

$$p=\frac{1}{4.46}$$

として，同じカードにたどりつく確率を求めてみよう．カードは全部で52枚あるが，最初にカードを選ぶことで，平均4.5だけ進んだことになるので，残りは，

$$52-4.5$$

である．そして，この残りのカードの上を，平均4.46枚のペースで進むことになるので，

$$(52-4.5)/4.46=10.65$$

回の，カードをジャンプする機会があると考えられる．ここで，計算を簡単にするため10回のジャンプとしておこう．

最初の1から8までの数字を選ぶ段階で，2人が一致する確率は $\dfrac{1}{8}$ で，一致しない確率は余事象の $\dfrac{7}{8}$ である．カードの数字を見ながら進む段階で，2人が一致する確率は $p=\dfrac{1}{4.46}$ で，一致しない確率は余事象の $1-p=1-\dfrac{1}{4.46}$ である．最初の数字を選ぶ段階，カードの数字を見ながら進む10回の段階で，ことごとく一致しない確率は，

$$\left(\frac{7}{8}\right)\left(1-\frac{1}{4.46}\right)^{10}\approx 0.07 \qquad (1)$$

となる．余事象をとると

$$P=1-0.07=0.93$$

となる．52枚のカード上を移動する間に，少なくとも一回は一致する確率は0.93となる．つまり93%の確率で一致するというのである．

この確率計算の理論値は，パソコンによるシミュレーション結果とよくあっていた．

S.ハンブルは，大雑把な計算として(1)式を示したが，厳密に考えると，左辺の式は，少し矛盾しているように思える．1から8までの数字を選ぶ段階では，平均して $m=4.5$ 進んでいるのであるから，この段階でも

$$p=\frac{1}{m}=\frac{1}{4.5}$$

として確率 を求め，

$$\left(1-\frac{1}{4.5}\right)\left(1-\frac{1}{4.46}\right)^{10}\approx 0.06 \qquad (2)$$

とすべきではないだろうか．ただし，式を変えても確率の値はそれほどの変化はなかった．

以上は，2人が一致する確率を求めたが，参加したのは8人である．8人のうち任意の2人が一致する確率が93%であるので，8人がどこかで一致する確率は93%より，さらに大きくなることが予想できる．

3. 数の平均 m と確率 p の関係

進む数の平均 m と確率 $p=1/m$ の関係は次のように考えるとよい．数字が{1}だけのカードで構成されていたら，進む数の平均は $m=1$ であり，その逆数をとった確率は $p=1/m=1$ であり，1の確率で次のカードに移動することになり，これは自明である．

$$m=1,\ p=\frac{1}{m}=1$$

数字が $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ の7個で構成されている場合を考えてみよう．7個の数字は均等に表れるので，平均をとると，

$$m=(1+2+3+4+5+6+7)/7=4$$

となる．平均して4つ進むと考えることができる．この場合の確率は，

$$p=\frac{1}{m}=\frac{1}{4}$$

となる．

$\{1,2,3,4,5,6,7\}$ の中の $\{i\}$ へ移動する確率を p_i とするとき，1から7までへの移動は，それぞれ等確率であり，

$$p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6=p_7=\frac{1}{7} \qquad (*)$$

$$\sum_{i=1}^{7} p_i=1$$

となる．確率分布は図2のf1である．

一方，移動の「平均」を考える場合の確率は，どのように考えるとよいのだろうか．これは，移動する場所が $\{4\pm0\}$, $\{4\pm1\}$, $\{4\pm2\}$, $\{4\pm3\}$ の4か所があり，それぞれの確率が $p=\dfrac{1}{4}$ であるとすると，うまく説明がつく．$\{j\}$ へ移動する確率を $p\{j\}$ とするならば，

$$p\{4\pm0\}=p\{4\pm1\}=p\{4\pm2\}=p\{4\pm3\}=\frac{1}{4}$$

であり，これを7個の数字に展開すると，

$$p_1=p_2=p_3=p_5=p_6=p_7=\frac{1}{8},\ p_4=\frac{1}{4} \qquad (**)$$

$$\sum_{i=1}^{7} p_i=1$$

となる．確率分布は図2のf2である．

f1とf2のどちらも確率の総和が1となるが，(*)式と(**)式では，確率分布が少し違ってくるが，これ以後は，「平均」の考え方で確率を説明していく．

また，$\{1,2,3,4,5,6,7\}$ の平均値を μ，標準偏差を σ とすると，

$$\mu=4,\ \sigma=2$$

となり，この値を用いて正規分布

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\quad(-\infty<x<\infty)$$

を求めることができる(図3)．$x=4$ における確率が $f(4)=0.20$ となり，オーダー的に図2の p_4 に近い値となるが，正規分布は確率変数を $-\infty<x<\infty$ としたもので，図2のf1やf2と確率分布はかなり違ってくる．ここでは正規分布は用いないこととする．

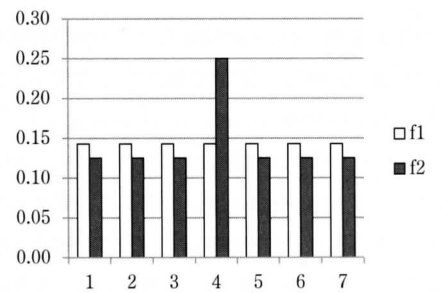

図2　普通の確率分布(f1)と「平均」を用いた確率分布(f2)

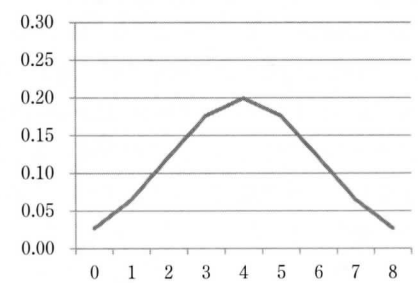

図3　正規分布

4. クルスカルの原理

さて，このカード・マジックはクルスカル・カウントとよばれるものをS. ハンブルが応用したものであるらしい．クルスカルとは，物理学者マーチン・クルスカル(1925-2006)のことで，専門の研究以外に，このような功績も残している．「クルスカルの計数(The Kruskal Count)」と呼ばれたり，「クルスカルの原理(The Kruskal Principle)」と呼ばれたりしている．これを紹介する初期の記事としては，マーチン・ガードナーの「サイエンティフィック・アメリカン」誌に掲載されたものがある[2]．邦訳されたものではジュリアン・ハヴィルのものがある[3].

本格的な学術論文としては，ジェフリー・C・ラガリアスらの「クルスカル・カウント」という22ページの分厚い英語論文がある[4]．それで，この英語論文にしたがい確率計算を概観してみよう．ここで紹介されている計算方法は，S. ハンブルが示した計算式(1)とは少し違う．まず，その結果を示そう．

絵札の数字を1と同等とすると，進む数の平均は

$$m = (1+2+3+\cdots+10+1+1+1)/13 = 4.46$$

となり，確率は

$$p = \frac{1}{m} = \frac{1}{4.46} = 0.22$$

となる．ここまでは同じである．N 枚$(=52)$のカードのどこかで一致する確率は，

$$P = 1-(1-p^2)^N$$
$$= 1-\left(1-\left(\frac{1}{4.46}\right)^2\right)^{52} \approx 0.931 \qquad (3)$$

となる(J. C. ラガリアスらによる)．

(3)式を理解するため図4のような2つの系列を用意した．トランプを2セット用意して，それぞれが独自に数を読み取って進むことにする．確率過程で，未来の挙動が現在の値だけで決定され，過去の挙動と無関係であることをマルコフ連鎖(Markov chain)という．カードの数字をみて，その数だけ進むというのはまさにマルコフ連鎖である．系列1と系列2はマルコフ連鎖が2つということになる．

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
系列1	8 *	A	A	7	8	10	5	3	5 *	4	J	8	A
系列2	K *	10 *	3	J	5	A	J	A	K	10	4	A *	8 *

	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
系列1	2 *	J	6 *	4	J	7	3	5	K *	7 *	8	10	9
系列2	9	9	2	8	K	5	7	6 *	7	6	7	5	10

	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
系列1	7	4	Q	4 *	10	3	9	3 *	6	9	2 *	K	Q *
系列2	7 *	A	9	9	4	8	Q	2 *	Q	Q *	3 *	8	10

	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
系列1	2 *	A	6 *	2	K	10	9	6	J *	5 *	Q	Q	K
系列2	3 *	2	4	J *	K *	6 *	Q	J	4	3	5	2 *	6

図4　2つの系列での一致

系列1は1枚目のカード8を読み，8つ進んで9枚目のカード5に移動する．そして5つ移動して14枚目のカード2に移動する．系列1は8, 5, 2, 6, …のように進み，系列2はK, 10, A, 8, …のように進む．アスタリスク(*)はジャンプしたカードの場所である．この2つの系列が52枚のカード上をそれぞれ進むとき，同じ番号の位置にくる確率はどれくらいであろうか．それが，今回の確率問題である．図4の場合は，先頭から34番目の位置で，系列1と系列2が一致している．

1枚目のカードの数字を見て，2枚目のカードの位置にジャンプする確率は p である．系列1と系列2がともに2枚目の位置にきて，この位置で一致する確率は，

$$p \times p = p^2$$

となり，2枚目で一致しない確率は余事象をとって，

$$1-p^2$$

となる．

系列1と系列2が，1回目から $i-1$ 回目の試行では一致せず，i 回目の試行で初めて一致するという確率分布は幾何分布(Geometric distribution)として知られている．今回の問題は，1回目の試行で初めて一致する確率と，2回目の試行で初めて一致する確率と，…，N 回目の試行で初めて一致する確率の総和(幾何分布の積分)となるが，余事象の考えを用いると計算が楽である．

系列1と系列2が，1回目の試行でも一致せず，2回目の試行でも一致せず，…，N $(=52)$ 回目の試行でも一致しない確率を求めてみる．それは，

$$(1-p^2)^N$$

である．そして，すくなくとも1回は，どこかの試行で初めて一致する確率は，上記の余事象であり，

$$P = 1-(1-p^2)^N$$

となる．このような考えで導入したのがJ. C. ラガリアスらによる(3)式である．

前述した，S. ハンブルの計算方法は，(1)式を応用すると

$$P = 1-(1-p)^{\frac{N}{m}} = 1-\left(1-\frac{1}{4.46}\right)^{\frac{52}{4.46}} \approx 0.948 \qquad (4)$$

となる．m は数字の平均で，$p = 1/m$ とする．N をカードの総数とし，これを m で割ると，カードの数を読み取ってジャンプする回数となる．図4ではアスタリスク(*)の数で，この回数は約12回である．平均 m 枚進む間に，そのどこかで2つの系列が一致する確率は p である．一致しない確率は余事象の $(1-p)$ であり，これらがジャンプする回数のうちで，一度も一致しない確率を求め，その余事象をとったのが(4)式である．

(3)式と(4)式は，一見すると違った公式であるが，確率を違う立場で求めたものであり，数値を代入するとこの2つは同じ値をもつことがわかる．

また，クルスカルの原理は，エルゴード仮説とも関係している．確率過程において，空間平均が時間平均に等しいという，気体の分子運動を確率で理解しようとして生まれた考えがエルゴード仮説であるが，カード・マジックの背景に深い理論がひそんでいるということである．詳しくは専門書にゆだねることにしたい．

参考文献

[1] Steve Humble, Magic Card Maths, The Montana Mathematics Enthusiast, Vol.5, No.2&3, 327-336, (2008).

[2] Martin Gardner, Mathematical Games, Scientific American, Vol. 238, No. 2, (February 1978).

[3] ジュリアン・ハヴィル，松浦俊輔訳『世界でもっとも奇妙な数学パズル』青土社，2009年

[4] Jeffrey C. Lagarias, Eric Rains, Robert J. Vanderbei, The Kruskal Count, Cornell University Library, (2001).

(にしやまゆたか／大阪経済大学)