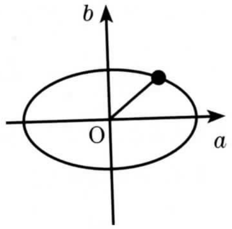
みると，図のように楕円として表現できます．



よって，

$a=\sqrt{3}\cos\theta$,

$b=\sin\theta$

とおけて，単位ベクトルは

$(\sqrt{3}\cos\theta)x+\sin\theta$

という形の1次式になることが分かります．

$\langle(\sqrt{3}\cos\alpha)x+\sin\alpha,\ (\sqrt{3}\cos\beta)x+\sin\beta\rangle$ が正規直交基底になる条件は，

$$((\sqrt{3}\cos\alpha)x+\sin\alpha,\ (\sqrt{3}\cos\beta)x+\sin\beta)$$
$$=\frac{\sqrt{3}\cos\alpha\cdot\sqrt{3}\cos\beta}{3}+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$=\cos(\alpha-\beta)$$

より，

$$\cos(\alpha-\beta)=0$$

です．よって，例えば，

$$\langle(\sqrt{3}\cos\alpha)x+\sin\alpha,\ (\sqrt{3}\sin\alpha)x-\cos\alpha\rangle$$
$$\left(\beta=\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$$

は正規直交基底です．

標準的な基底 $\langle x,\ 1\rangle$ は，

$$\|x\|=\sqrt{\frac{1}{3}}\ (a=1,\ b=0),$$
$$\|1\|=1\ (a=0,\ b=1),$$
$$(x,\ 1)=\frac{1\cdot0}{3}+0\cdot1=0$$
$$(a=1,\ b=0,\ c=0,\ d=1)$$

より，直交するけれど，正規ではない基底です．少し係数を変えて，$\langle\sqrt{3}x,\ 1\rangle$ とすれば正規直交基底になります．これが最も扱いやすい基底になります(上記の形でいうと，$\alpha=0,\ \beta=\frac{\pi}{2}$ になっています)．

例 sin,cosの1次結合で表せる関数の集合

$$\{A\sin x+B\cos x \mid A,\ B\text{は実数}\}$$

で，積分の内積を考えます．積分区間は $[-\pi,\ \pi]$ にしておきます．

標準的な基底 $\langle\sin x,\ \cos x\rangle$ で大きさと内積を計算して，それを元に正規直交基底を作ってみます．

積分すると

$$\|\sin x\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$=\pi,$$

$$\|\cos x\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$=\pi,$$

$$(\sin x,\ \cos x)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos x\,dx$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin 2x}{2}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$=0$$

となるので，$\left\langle\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x\right\rangle$ が正規直交基底の一例になっています．

これを拡張すると，有名な**フーリエ級数**になっていきます．簡単にいうと…

$$\left\langle\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\right.$$
$$\left.\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ \cdots\cdots\right\rangle$$

が，**無限次元ベクトル空間**の正規直交基底になっていることが分かります．この無限次元ベクトル空間の要素(ベクトル)は，すべて周期 2π の周期関数になります．実は，周期 2π の周期関数を考えるのに，このベクトル空間の関数(ベクトル)を使うのです．

基底を正規化していない状態ですが，ベクトルを

$$\frac{a_0}{2}+b_1\sin x+a_1\cos x$$
$$+b_2\sin 2x+a_2\cos 2x+\cdots\cdots$$

と表記し，積分(内積)で係数を求めるのです．

*　　　　*

今回は，ベクトル空間での内積の概念を抽象化しました．次回は，行列と1次変換について考え，行列の計算ルールの意味を探ります．

(よしだ　のぶお／研伸館)

Mathématiques colonne 11

平方数の約数

西山　豊

トランプを使ったパズルやゲームは限りなくあるが，次に紹介するトリックは鮮やかである．トランプから一種類，たとえばスペードだけのカードを選び出し，エースからキングまでを裏向けにして左から右に並べる．まず，1の倍数のカードを左から順に表に向ける．1の倍数は13枚のすべてである．

A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K

つぎに2の倍数のカード(2, 4, 6, …)を裏向ける．

A, *, 3, *, 5, *, 7, *, 9, *, J, *, K

つぎに3の倍数のカード(3, 6, 9, …)を裏向ける．すでに裏向いているカードがあれば(6とQ)，それを表にする．つまり，カードの向きを反転させるということだ．

A, *, *, *, 5, 6, 7, *, *, *, J, Q, K

このようにして，4の倍数のカードの向きを反転させ，5の倍数のカードの向きを反転させ，…，13の倍数のカードの向きを反転させると，最終的にはつぎのようになる．

A, *, *, 4, *, *, *, *, 9, *, *, *, *

このカードの並びを見て，何か気づかないだろうか．エース，4，9といった平方数のカードだけが表を向き，それ以外はすべて裏向いている．これは偶然であろうか．

トリックに使ったのは13枚のカードであったので，偶然そうなったのかも知れない．今度は100枚のカードを使い，1から100までの数字を記入したカードをホワイト・ボードの棚に今と同じように裏向けて並べる．そして1の倍数，2の倍数，3の倍数のカードを反転させ，…，100の倍数のカードを反転させると，最終的には，平方数のカードだけが表を向き(1, 4, …, 81, 100)，それ以外のカードは裏を向いている．

ここまでくると，その理由を考えてみたくなるのは当然だ．実は，このトリックは数に関する重要な定理を証明していることになっている．

「平方数の約数は奇数個ある」

整数 N の約数を，1とそれ自身 N を含めるとする．約数をすべて求めてみると，約数どうしが対になることが多い．たとえば12の約数は，1, 2, 3, 4, 6, 12の6個あるが，

$$1\times12=2\times6=3\times4=12$$

のように，1と12，2と6，3と4が対になっている．それで，数の約数の個数は，ほとんどが偶数である．ところが対にならない約数がある．それは平方数の場合の約数である．16の約数は，1, 2, 4, 8, 16の5個あるが，

$$1\times16=2\times8=16\text{ と }4\times4=16$$

のように，1と16，2と8は対になっているが，4は対にならない(同じ数を掛けるのが平方数たる所以である)．それで，平方数の場合だけが，約数の個数が奇数となる．

さて，13枚のカードで1の倍数，2の倍数，3の倍数，…のカードを反転させたが，これは，その数の約数であるときに反転させたことになる．たとえば8のカードは，1，2，4，8の倍数のとき，つまり8の約数1，2，4，8のとき反転させたことになる．反転の回数が偶数であれば，最初の状態に戻り(裏)，奇数であれば表になる．

以上の話は，マーチン・ガードナーの「数学ゲーム」(『サイエンティフィック・アメリカン』1974年11月号)に紹介されたものである．このような話題を数学の授業に取り入れるなら，数学嫌いの生徒が減るのではないだろうか．

(にしやま　ゆたか／大阪経済大学)