

証明 写像 $f:V \rightarrow V'$ は線形写像だから
 $f(o+o) = f(o) + f(o)$ ($o \in V, f(o) \in V'$)
 すなわち
 $f(o) + f(o) = f(o)$ ($f(o) \in V'$)
 よって
 $f(o) = o'$ ($o \in V, o' \in V'$)
 が成り立つ。
 (証明終)

O: この定理を用いれば先ほどの演習の(2)は次のように考えることもできるよね。
 $f(x) = Ax + b$ において、 $x = o$ とすると、
 $f(o) = Ao + b = b$ ($o \in R^2$)
 $b \neq o$ なら
 $f(o) = o$
 をみかさず、 f は線形写像ではない。ついでにこのような例も考えてみよう。

例 $f: R^3 \rightarrow R^2$
 $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x$
 である線形写像 f について、 o を R^3 の零元の零元、 o' を R^2 の零元とすると
 $f(o) = o'$
 が成り立つことを確認せよ。

K: 任せてください。
 $f(o) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} o$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = o'$
 すなわち
 $f(o) = o'$
 楽勝デース。
O: さて、
 $f(x) = o'$ ($x \in V, o' \in V'$)
 となる x について考えてみよう。
K: $f(o) = o'$ ではないのですか。
O: o の像は o' だが

$f(x) = o'$ ($x \in V, o' \in V'$)
 となる x は o とは限らない。
K: そうですね。
O: ここで核 Kernel を定義しておこう。
定義 ベクトル空間 V からベクトル空間 V' への写像 f について、
 $\text{Ker} f = \{x \mid f(x) = o\}$
 を f の核といい、これは V の部分空間である。

K: Ker ... ?
O: Ker f はカーネル f と読むのだ。線形写像の核の例を挙げてみようか。

例 $f: R^3 \rightarrow R^2$
 $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x$
 である線形写像 f の核を求めよう。

K: 実感が得られそうですね。まず、カーネルの定義から書いてみます。
 $f(x) = o$ ($x \in R^3, o \in R^2$)
 これから
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 これを解けばいいのですね。
 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とおいて消去法で解きます。係数行列のランクは2で未知数は3個ありますから、定数を1つ用いて
 $x_1 = k, x_2 = k, x_3 = -k$ (k は任意の実数)
 よって
 $f(x) = o \Leftrightarrow x = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ($k \in R$)
 したがって
 $\text{Ker} f = \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid k \in R \right\}$
 となります。
O: よくできているよ。
K: またほめられたのですね。
O: その通りだ。
 (おおたけ しんいち/京都府立大学(非常勤))

日本人は奇数が好きだ。子供の成長祝いに宮参りする七五三の行事がそうで、別に六四二でもよいはずだが七五三と決まっている。一月一日は元旦、三月三日は桃の節句、五月五日は端午の節句、七月七日は七夕、九月九日は重陽節というように奇数の月日に祝う習慣がある。日本三大祭りはあるが、四大祭りはない。俳句は五七五で短歌は五七五七七でこれも奇数、漢詩の五言絶句、七言絶句も奇数、応援団も三三七拍子で奇数である。
 ところが一方で、「二」は分かれる(別れる)、「四」は死、「六」はろくでなし、というにあまり評判がよくない。結婚式の祝儀は一万円か三万円か五万円かの奇数で二万円、四万円などはつまない。また葬儀の香典もすべて奇数で施す。病院の駐車場や病室は四という数字を飛ばしている。奇数が好まれ偶数が嫌われるが、例外は末広がりの「八」と苦の「九」である。
 日本では虹の七色は、赤、橙、黄、緑、青、藍、紫(堇)であるが、英語文化圏では、藍色 indigo が省略されて六色とすることがある。虹は連続光であるので七色も六色もどちらもいえないが、奇数と偶数の文化が反映しているのではないだろうか。三人寄れば文殊の知恵ということわざがある。これを英語に訳すと、
 Two heads are better than one.
 となる。日本語では二人より三人のほうがよく、英語では1人より2人のほうがよいとなる。ここでも奇数優先(三人)と偶数優先(2人)の違いが見られるのではないだろうか。
 英語では偶数を even number 奇数を odd number という。古い英語では奇数が uneven number という単語が使われていた。これは、まず偶数があって、偶数でないものが奇数という考え方だ。12進法や60進法のように、ものを数えたり分数を処理したりする場合に偶数は合理的な数である。

西洋ではどうも奇数を嫌う傾向にある。odd sock (片方の靴下) や odd hand (片手) というように、odd は両方そろっていない正常でないことを意味することに使う。odd jobs は雑用である。食器の数は4点セットや6点セットが基本になっている。日本では5点セットが基本なので、洋食器を購入する場合は戸惑うことがある。
 どうして、奇数の文化と偶数の文化が生まれたのだろうか。古代ギリシアのピタゴラス学派の人々はあらゆるものを数に結びつけ、また数で表現しようとした。まず数を奇数と偶数に分類し、奇数は二つに分割しようとしてもできないもので、こわすことのできないものは完全であると考え、ここから奇数を「完全」や「神秘」、「有限」や「秩序」と結びつけた。奇数は善いものと考えられたようである。
 易の思想が発祥したのは古代中国の周の時代で、陰陽思想では数字を陽と陰に分けている。一、三、五、七、九は陽数であり、二、四、六、八、十は陰数である。陽と陰は単なる対立概念であるが、陽数を善いものとしたのは古代ギリシアに似ている。
 古代ギリシア数学は、アラビア数学やインド数学の発展へとつながる。また、十字軍の時代にイタリアを経由してヨーロッパ全域に伝わり、近代数学として確立するが、古代中国の陰陽思想や古代ギリシア哲学の意味するものが捨て去られ、数を数え上げるには最も合理的な偶数が重んじられ、偶数文化が生まれたのではないだろうか。奇数の文化と偶数の文化には優劣が無い。文化や歴史を学び、違いを理解することに世界平和の道がある。
 (にしやま ゆたか/大阪経済大学)