Mathématiques colonne 13

二千円紙幣

西山　豊

沖縄サミットと西暦2000年（ミレニアム）を記念して小渕首相の発案で二千円紙幣が発行されて久しい．表が守礼門，裏が源氏物語のデザインで当時は話題をよんだが，期待とは裏腹に二千円紙幣はほとんど流通しなくなってしまった．アメリカでは20ドル紙幣が，イギリスでは20ポンド紙幣がごく普通に流通しているが，日本では二千円紙幣をほとんど見かけない．二千円紙幣が流通しない理由として，自動販売機が対応していない，レジスターにスペースがないなどの理由があげられたが，今日ではかなり改善されている．それにもかかわらず流通しないのは何か理由があるのだろうか．

現在，日本で使用されている通貨は，硬貨が1円，5円，10円，50円，100円，500円 の5種　類と，紙幣が1000円，2000円，5000円，10000円の4種類である．ほとんどが「1」と「5」を単位としたもので，「2」を単位としたものは2000円紙幣だけである．日本の通貨史上で「2」を単位としたものが皆無であったわけではなく，20円券（1917年の菅原道真，1931年の藤原鎌足）や200円券（1927年の武内宿禰，1942年の藤原鎌足）が発行されたこともあるが，戦後でははじめてのことである．

現在，イギリスで使用されている通貨は，硬貨が1p, 2p, 5p, 10p, 20p, 50p, 1ポンド，2ポンドの8種類，紙幣が5ポンド，10ポンド，20ポンド，50ポンドの4種類である．pはペンスという単位で，1ポンド＝100pである．日本とイギリスの金種を比べると，硬貨がイギリスの方が3種類多くて使いにくいが紙幣は4種類で同じである．50ポンド紙幣はほとんど見ることがなく，10ポンド紙幣と20ポンド紙幣がよく使われている．ATMで300ポンドを引き出すと20ポンド紙幣が10枚と10ポンド紙幣が10枚出てくる．100ポンドの支払いには20ポンド紙幣を5枚，50ポンドの支払いには20ポンド紙幣を2枚と10ポンド紙幣を1枚でおこなっている．これで別に不自由はない．5ポンド紙幣はあまり見かけない．よく流通している紙幣の最高金種は20ポンド紙幣であり，硬貨の最高金種は2ポンド硬貨である．

ケンブリッジからロンドンまでは往復料金が18ポンドで片道料金が17.9ポンドである．これは間違いではないかと思われるが，このような料金体系はイギリス国有鉄道の基本である．日本の場合は片道料金の2倍が往復料金であるが，イギリスは往復が前提で片道料金という意味が希薄である．ホテルやゲストハウスの宿泊は2人部屋が基本で1人部屋はほとんどなく，1人で泊まる場合も2人部屋の料金を支払うことになる．「ぶらり一人旅」というのはなく，かならずペアで旅行するという習慣がある．3人の旅行というのも少なく2人，4人というように行動する場合は偶数に丸める傾向がある．

日本での結婚式のご祝儀の金額をインターネットで調べてみると，友人や同僚は2万円か3万円，上司や恩師は3万円か5万円，親族は5万円か10万円が相場である．ここで注目すべきは，「割りきれる数字は縁起が悪い」ということで，2万円や4万円をあえて避けていることである．どうしても2万円にする場合は，1万円紙幣1枚と5千円紙幣2枚の合計3枚という西洋人には理解されにくい奇妙な方法をとる．香典の相場は，あるデータによると3千円，5千円，1万円に相場が集中している．この場合も数字に注目すると，偶数が避けられている．このように日本と西洋には奇数の文化と偶数の文化の違いが背景にあり，日本人が二千円紙幣を受け入れるにはまだまだ先のようである．

（にしやま　ゆたか／大阪経済大学）

Let's consider the problem

考えてみよう

第9回

最大か 最小か？

一松　信

1. 極値問題の判定

多くの極値問題では求めた候補（例えば微分して0とおいた方程式の解）が最大か最小かは，設定された問題の意味から自然に判定できます．また2階導関数によって，極大か極小かまたは鞍点など極値でないかが判定できる場面が普通です．しかし真の最大・最小の判定には，微分法にこだわらずに直接別の方法で調べたほうが，かえって早い場合も多々あります．

そのような吟味を怠って失敗した例は多数あります．今回は一例として平面三角形の3個の内角の対称式特に $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ に関する次の対称式

$$\begin{aligned} S &= \cos A + \cos B + \cos C, \\ T &= \cos A \cdot \cos B + \cos A \cdot \cos C + \cos B \cdot \cos C, \\ P &= \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C, \\ F &= \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \end{aligned} \tag{1}$$

の極値を考察します．これらはすべて正三角形 $(A=B=C)$ のとき極値をとりますが，それが，最大か最小かの判定は自明ではありません．

それらの極値は制約条件 $A+B+C=\pi\,(180^\circ)$ の下での極値として，ラグランジュ乗数を活用して計算できますが，方程式を解くのが意外と厄介な例もあります．もちろん演習課題としてぜひ一度は試みて下さい．

2. 相互の基本関係

(1)の4量のうち $S^2=F+2T$ は明らかですが，恒等式

$$F+2P=1 \tag{2}$$

が成立します．これは有名な関係式で前にも論じましたが，念のために証明しておきます．

$A+B+C=\pi$ から

$$\begin{aligned} \cos C &= -\cos(A+B) \\ &= \sin A \cdot \sin B - \cos A \cdot \cos B \end{aligned}$$

です．これを

$$\cos C + \cos A \cdot \cos B = \sin A \cdot \sin B$$

と書き換え，2乗して $\sin^2 A = 1-\cos^2 A$ などとすると

$$\begin{aligned} &\cos^2 C + \cos^2 A \cdot \cos^2 B + 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \\ &= 1-\cos^2 A - \cos^2 B + \cos^2 A \cdot \cos^2 B \end{aligned}$$

となります．これを整理すれば(2)になります．　□

特に鋭角三角形に限れば，相加平均・相乗平均の不等式からただちに

$$0 < 27P \leqq S^3, \quad 0 < 27P^2 \leqq T^3 \tag{3}$$

が成立します．さらに2次式の関係から

$$T \leqq F, \quad 3T \leqq S^2 \tag{4}$$

であり，(3)，(4)のいずれも等号は $A=B=C$ のときに限って成立します．

これらの相互関係を活用すると，S の最大値を定めれば，他の量の最大・最小はすべて容易に求めることができます．

3. 和の極値

和S の極値はラグランジュの乗数法によっても容易に $A=B=C$ のときとわかりますが，直接に三角関数の公式によって求めてみましょう．

鋭角三角形に限れば $y=\cos x$, $0 \leqq x \leqq \pi/2$ のグラフが真に上に凸なことから直ちに

$$S \leqq 3\cos[(A+B+C)/3] = 3/2 \tag{5}$$

で，等号は $A=B=C$ のときに限ることがわかります．そして直角三角形・鈍角三角形全体では $S \leqq \sqrt{2} < 3/2$（等号は直角二等辺三角形のとき）を示すことができるので，正三角形のときの値 $3/2$ が真に最大値であることが確かめられます．しかしこのままでは場合分けを要するので，少し変形したほ