Mathématiques colonne 14

金環日食の５分

西山　豊

2012年は天体ショーが楽しめる年であった．5月21日は，日本列島の主要な都市で金環日食が見られ1839年以来の173年ぶりの記念すべき日だった．大阪では，日食のはじめが6時17分，金環の時間は7時28分～31分の3分間，日食のおわりが8時54分であった．当日は晴天に恵まれ，月が太陽の中にすっぽり入り，完全な金環日食が観測できた．私は，日食グラスを用意していなかったので，急きょ段ボールに穴をあけ，これで日食を観察した．

50年以上前，小学生のころ，ススをつけたガラスで日食を見たことがあるが，今回はふとつぎのような疑問が浮かび上がった．

Q1．金環日食はどうしておこるのか．

Q2．金環日食と皆既日食はどう違うのか．

Q3．日食は新月のときにおこり，月食は満月のときにおこるのはなぜか．

Q3．日食はどうして西側から始まり，東側で終わるのか．

Q4．月は東から昇り西に沈むが，日食の移動と矛盾しないか．

Q5．金環日食がみえる約5分間は，一体どのように計算するのか．

太陽，月，地球の位置関係が一直線上にあれば，日食がおこるくらいは素人にはわかる．そして，月が地球に近づいた位置にあれば，太陽がすべて隠れるので皆既日食，地球から遠ざかっていれば，太陽の中にすっぽり入って金環日食になることもわかる．月の公転軌道は楕円軌道であることから想像がつく．

天動説から新月のときに日食がおこる理由を考えてみよう．天球上の太陽の通り道は黄道(こうどう)と呼ばれる．太陽は黄道上をゆっくり東向きに移動して，1年に1回の割合で天球を一周する．一方，天球上の月の通り道は白道(はくどう)と呼ばれる．白道は黄道にほぼ並行しているが，黄道とは約5度の傾きをもち，2か所で黄道と交わる．太陽―月―地球の位置にあるとき日食となり，太陽―地球―月の位置にあるとき月食となるから，日食は新月のとき，月食は満月のときにおこる．

月は地球の周りを約30日で1周している．1日で約12度，1時間で約0.5度となる．0.5度は月の見かけの大きさ(視直径)に等しく，月は1時間で月自身の視直径の速度で天球上を西から東へ移動している．月は東から昇り西に沈むが，日食は西から始まり東に終わるのだ．日食は月の公転を「実感」するチャンスでもある．

疑問のQ5について，天体観測も数学の問題であり，これは3次元空間の幾何学問題として簡単に解けるのではないかと私は思った．地球は太陽の周りを365日かけて公転し，1日で自転している．地球の地軸は，公転面の法線に対して約23.5度傾いている．月は27.3日で地球の周りを公転している．月の公転軌道は地球の公転軌道と約5度傾いている．太陽の半径，月の半径，地球から太陽，月までの距離がわかれば，なんとか計算できそうなものだが．

金環日食の5分間を地動説による計算は次のとおりである．地球上に落とされた月の影は，円の方程式として表される．地球の自転により観測点がその円周に触れた時が日食の始まりであり，円周から離れたときが日食の終わりとなる．地軸が23.5度傾いているため観測点の軌跡は単純ではない．時々刻々に変化するベッセル要素と呼ばれる数値群から正確な金環日食のデータが数値計算されていく．金環日食の時間が単純な数式で表されない理由はここにある．詳しい説明は，つぎの書籍を参考のこと．

長沢工『日食計算の基礎』地人書館，2011年

(にしやま　ゆたか／大阪経済大学)

代数的グラフ理論入門

仁平　政一

グラフの自己同形群

グラフと群の間には興味深くかつ実りの多い結果がたくさんあります．

今回は，これから必要とする群に関する基本事項とグラフの点集合上の置換が作る群についての話をします．

10.1 群の定義と群の同形

早速，群の定義について述べましょう．

集合Γの任意の2元α，βに対してα，βの積と呼ばれるΓの元がただ1つ定まり（この元を$\alpha\beta$と表す）次の性質を持つとき**群**（group）と言います．

(1) 積に対して結合法則が成り立つ．すなわち，Γの任意の元α，β，γに対して$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$が成り立つ．

(2) 単位元が存在する．すなわち，Γのすべての元αに対して$\alpha 1=1\alpha=\alpha$となる元1が存在する．1を**単位元**という．

(3) 任意の元αに対して$\alpha\beta=\beta\alpha=1$となる$\Gamma$の元$\beta$が必ず存在する．$\beta$を$\alpha$の**逆元**といい，$\alpha^{-1}$で表す．

以上を群の公理と言います．

Γの元の個数を群Γの位数といい，$|\Gamma|$で表します．位数が有限のとき**有限群**，無限のとき**無限群**と言います．

以下，有限群のみを扱います．

ここで，例をあげておきましょう．

3文字の置換を考えます．それは，全部で次の6個になります．

$$1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad \alpha=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\quad \delta=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\quad \iota=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}.$$

この6個からなる集合を，第8回でもふれましたが，S_3で表します．

このS_3が置換の積に関して群をなすかどうか調べてみましょう．

なお，念のため置換の積について述べておきましょう．

n次（n文字）の置換は，n文字の集合NからNへの1対1の写像です．

そこで，n次の置換σ，τの積を合成写像

$$\sigma\tau(i)=\sigma(\tau(i))\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

によって，この順序で定義します．

例えば，

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\i&j&k\end{pmatrix},\quad \tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\l&m&n\end{pmatrix}$$

のとき，σの表示の順序を入れ替えて

$$\sigma=\begin{pmatrix}l&m&n\\p&q&r\end{pmatrix}$$

となるとき，積$\sigma\tau$は

$$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\i&j&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\l&m&n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}l&m&n\\p&q&r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\l&m&n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\p&q&r\end{pmatrix}$$

となります．

上記の方法で，$\alpha\beta$を求めてみると

$$\alpha\beta=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}.\qquad(10.1)$$

となります．

それでは，早速調べてみましょう

結合法則が成り立つことおよび1が単位元になっていることは明らかでしょう．

あとは逆元があるかどうか調べればよいことになります．

(10.1)より，αの逆元はβである（すなわち，$\alpha^{-1}=\beta$である）ことがわかります．同様にして，

$$\beta^{-1}=\alpha,\ \gamma^{-1}=\gamma,\ \delta^{-1}=\delta,\ \iota^{-1}=\iota$$

となることがわかりますから，S_3は群をなします．

一般に，n文字の置換全体の集合をS_nで表します．S_nの元の個数は全部で$n!$個あります．S_nは置換の積のも