Mathématiques colonne 15

誕生日が同じ

西山　豊

確率の講義をするときはいつも誕生日の話題を入れることにしている．クラスの中に誕生日が同じという学生がいるだろうか．もちろん，この話題は高校数学の確率の授業で取り入れられることもあるが，文系大学生は受験で数学をパスしているためか，意外と知られていないので私は好んで取り上げることにしている．

この話題で確率の実験をする時は，受講している学生の数が問題となる．私は講義室に入ると受講生の数をざっと計算しておく．そして，23人をはるかに超えていれば自信をもって実験に着手することができる．「このクラスには約40名の学生が受講しているが，この中で誕生日が同じ学生がいるだろうか．皆に予測を立ててもらい，実験してみよう」予測は単純で「いる」か「いない」かのどちらかである．

1クラスは約40人である．1年は365日として，ほとんどの学生は「いない」の方に予測する．その理由は1年は365日でクラスの人数は40人だから誕生日が重なる確率は365分の40とし，約1割と計算する．クラスの人数が366人になったとき始めて誕生日が同じものが「いる」ことになり40人くらいでは「いない」と判断する．この確率(約1割)は自分と同じ誕生日の学生がいる確率であり，問題を間違えやすい．

パソコンが普及する20年ほど前は，一人ずつ誕生日を言わせて，クラス全員が言い終わった後，同じ誕生日だったものは手を挙げなさい，ということにしていたが，40人ともなると聞き間違いということもあるので，最近はパソコンを利用して，各自の誕生日をメールで送ってもらい，それを表計算ソフトで集計することにしている．集計過程をモニターに映して学生に見せると，皆が予想した「いない」ではなく「いる」に結果が傾くことに教室内がざわめく．同じ誕生日の学生が2組もいて学生は不思議に思う．

そこで私は，余事象による確率の説明を行う．クラス40人全員の誕生日がすべて違う確率を計算し，その余事象を求めると誕生日が同じ学生が「いる」確率となる．1年を365日とする．1人目が選べる誕生日の確率は365日の中の365日であるから365分の365，2人目が選べる誕生日は365日の中から1日のぞいた364日であるから，確率は365分の364，…，40人目が選べる誕生日の確率は365分の326となり，これら40個の確率を掛けあわせると0.109となる．この確率の余事象0.891が同じ誕生日の学生が「いる」確率である．2人目から40人目の個別の確率は0.997〜0.893と1に近いが，これらを掛け合わせると0.109となるところが意外である．

クラスの人数をn人として，「いる」確率を計算し，確率が0.5を超える分岐点を探してみると，$n = 23$という数値がもとまる．クラスの人数が23人以上であれば，誕生日が同じものが「いる」確率が半分を超えるのである．23人といえば365日に対して1割もない数である．余事象の考え方は非常に有効である．“誕生日がすべて違う”の否定は，“すくなくともひと組の誕生日が同じ”である．「必ずしも〜でない」と「すくなくとも〜である」の関係は英語では，not always と at least のそれである．

40人で実験すると誕生日が同じは2組あり，そのうちの1組が隣の席に座っていた．数年前に60人で実験すると3組あり，そのうちの1組は隣の席に座っていた．席が隣り合わせるというのはそれほど珍しくなさそうだ．

(にしやま　ゆたか／大阪経済大学)

代数的グラフ理論入門

仁平　政一

点推移グラフ・辺推移グラフ, 対称グラフ

前回はグラフの自己同形群の話をしました. 今回は, その自己同形群が点集合上あるいは辺集合に推移的に作用する場合の話になります. ケーリーグラフなど面白いグラフが登場します.

11.1 点推移グラフ

$\Gamma(G)$はグラフGの自己同形群 (すなわち, グラフGの点の隣接関係を保存する$V(G)$上の置換全体の集合が, 置換の積という演算のもとで作る群) とします.

$\Gamma(G)$が$V(G)$上に推移的に作用するするとき (すなわち, Gの任意の点u, vに対して, $\Gamma(G)$のある元σが存在して$\sigma(u)=v$を満たすとき), $\Gamma(G)$は**点推移的**(*vertex-transitive*)であると言います.

$\Gamma(G)$が点推移的であるとき, グラフGを**点推移グラフ**(*vertex-transitive graph*)と呼びます.

具体例をあげましょう.

明らかに, 完全グラフK_pは点推移グラフです.

第5回目で定義したn-立方体Q_nも点推移グラフになります.

これから, その話をします. そこで, n-立方体Q_nの定義を, 第5回目とは異なる方法で定義します.

n-立方体Q_nとは, 点集合$V(Q_n)$として, 2進n組すなわち$V(Q_n)=\{(a_1, a_2, \cdots, a_n)|a_i= 0$または$1, i= 1, 2, \cdots ,n\}$を持ち, それらの2点は, 対応する2つの組がちょうど1ヶ所だけ異なるときかつそのときに限り, 辺で結んで得られるグラフのことです (この定義で得られたグラフが第5回目の定義で得られるグラフと同形になることの確認は読者に委ねます).

例えば, この方法の定義から得られる3-立方体Q_3は図11.1に示されているようなグラフになります.

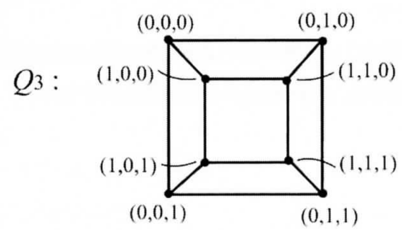

図11.1

では, n-立方体Q_nが点推移グラフであることの説明に移りましょう.

点$v \in V(Q_n)$を固定します. vは, もちろん, 2進n組です. ここで, $V(Q_n)$から$V(Q_n)$への写像σ_vを

$$\sigma_v : u \to u+v \quad (u \in V(Q_n))$$

で定義します. 2つの要素の和は$mod2$で考えます.

定義から, 『$\{u, w\} \in E(Q_n) \Leftrightarrow u$と$w$の2進$n$組がちょうど1ヶ所だけ異なる』ことでしたから, $u+v$の2進n組と$u+w$の2進n組がちょうど1ヶ所だけ異なることがわかります. このことから,

$$\{u, w\} \in E(Q_n) \Leftrightarrow \{\sigma_v(u), \sigma_v(w)\} \in E(Q_n)$$

が得られます. これは, σ_vが$V(Q_n)$上の1つの自己同形写像であることを示しています.

$|V(Q_n)|=2^n$ですから, そのような置換の個数は2^n個で, それらはQ_nの自己同形群の部分群Hを作ります.

ところで, の任意の点u, wに対して

$$\sigma_{w-u} : u \to w-u+u=w$$

ですから, Hは$V(Q_n)$上に推移的に作用していることがわかります. したがって, Q_nは点推移グラフになります.

問11.1　位数5の点推移グラフには完全グラフK_5以外に2つある. それを求めよ.

さて, グラフGが点推移的ならば, Gの異なる2点u, vに対して, 隣接関係を保ちかつuをvにうつす$V(G)$上の置換が存在しますから, 明らかにGは正則グラフになります.

そこで, 点推移グラフの点の次数を言うとき, 次数がkの点推移グラフと呼ぶことにします.

点推移グラフの固有値に関しては, 次の結果が知られています.

定理11.1　Gは次数がkの点推移グラフで, λは重複度が1のGの固有値とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $|V(G)|$が奇数ならば, $\lambda=k$.

(2) $|V(G)|$が偶数ならば, λは整数$2\alpha-k$のうちの1つである. ここに, $0 \leqq \alpha \leqq k$.