Mathématiques colonne 17

プレゼント交換

西山　豊

誕生日会やクリスマス・パーティではプレゼント交換をするのが習わしである．参加者は各自1個ずつプレゼントを用意する．プレゼントをいったん集めて，人数分だけくじを用意して，プレゼントを引くのである．ところがどういうわけか自分が持ってきたプレゼントを引いてしまうことがある．これではプレゼント交換になっていない．もちろん自分が持ってきたプレゼントだなんて誰にも言えないし言わない．心の中では，なんて不運な私なのだろう，ついていないと思ったことはないだろうか．

これと同じ現象に席替えがある．今はどうか知らないが，私の小中高時代は学期初めには席替えがよく行われた．席替えを通してクラスのコミュニケーションの向上をはかるという試みであり，生徒たちにはひとつの楽しみであった．

ところが，ランダムに席替えくじを作っていても，誰かが「元の席である」と訴える生徒が必ずいる．そういう生徒は皆に注目され，恥ずかしい思いをする．先生は機転を利かせて，「誰々さんに代わってもらいなさい」と言って生徒間の調整を行う．こんな光景を見たことはないだろうか．

プレゼント交換や席替えにおける，このような現象は高確率で起こることがわかっている．モンモルの定理（P.R. Montmort, 1708年）として証明されており，確率の値も計算されている．生徒の数を n 人とすると確率は次式で表される．

$$P=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots\pm\frac{1}{n!}$$

式の由来は，W. フェラー，河田龍夫訳『確率論とその応用 I・上』紀伊國屋書店，1960，127－132ページを参照のこと．また，n を無限大に近づけると，

$$1-\frac{1}{e}\quad(\approx 0.63212)$$

の値に近づくことが知られている．e は自然対数で $e\approx 2.71828$ である．

驚くべきは人数 n にかかわらず，この確率は約3分の2であることである．100人でプレゼント交換しようが，1000人で席替えしようが自分の持ってきたプレゼントを引いてしまったり，元の席であったりすることが高確率で起こるということだ．

ここでは，数え上げの方法で，簡単な計算をしてみよう．子供の数が2人で，プレゼントが2個あったとしよう．子供に子供1，子供2，プレゼントにプレゼント1，プレゼント2というように番号をつけて，起こりうる組合せを表計算ソフトで整理してみる．2人の場合は，組合せは全部で $2!=2$ 通りあり，そのうちの1通りが子供1：プレゼント1，子供2：プレゼント2となり，自分のプレゼントを引くことになり，確率は $1\div 2$ で0.5ということになる．

子供の数が3人で，プレゼントが3個の場合は，子供とプレゼントの組合せは $3!=6$ 通りあり，そのうち自分のプレゼントを引くケースが4通りあり，確率は $4\div 6$ で0.67になる．子供の数が4人で，プレゼントが4個の場合は，組合せは $4!=24$ 通りあり，そのうち自分のプレゼントを引くケースが15通りあり，確率は $15\div 24$ で0.625になる．

子供が2人，3人，4人の場合，確率は0.5，0.67，0.625となり，0.6近辺にあることがわかる．子供の数を5人，6人として数え上げで求めてもよいのだが，数え上げの方法はますます煩雑になり，4人が限界である．そこで，前述のモンモルの公式が参考になる．公式の導入には，ベン図を用いた集合算があり，少し難しいかもしれないが，じっくり取り組めばこの式も理解不可能ではない．興味がある読者はチャレンジしてみること．

（にしやま　ゆたか／大阪経済大学）

やさしく学ぶ　　第13回

代数的グラフ理論入門

仁平政一

距離正則グラフのスペクトル

前回，直径 d の距離正則グラフの異なる固有値の個数はちょうど $d+1$ であることを示しました．

今回は，それらの固有値の重複度の話になります．

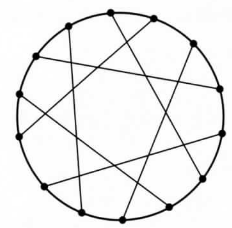

図13.1

13.1　交差行列

距離正則グラフの固有値を調べる際に，重要な役割を果たす交差行列の話から始めます．

今後，なんの断りもない場合は，グラフ G は，各点の次数が k で，直径が d の距離正則グラフとします．

G の交差配列の数字 c_i，a_i，b_i を，次のように対角要素に並べた $(d+1)\times(d+1)$ 行列

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ k & a_1 & c_2 & & O & \\ & b_1 & a_2 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & O & & & & c_d \\ & & & & b_{d-1} & a_d \end{bmatrix}$$

を G の**交差行列** (intersection matrix) といい，$\Lambda(G)$ で表します．

例えば，閉路グラフ C_4，完全グラフ K_p，完全2部グラフ $K_{3,3}$ の交差行列は，それぞれ

$$\Lambda(C_4)=\begin{bmatrix}0&1&0\\2&0&2\\0&1&0\end{bmatrix},\ \Lambda(K_p)=\begin{bmatrix}0&1\\p-1&p-2\end{bmatrix},$$

$$\Lambda(K_{3,3})=\begin{bmatrix}0&1&0\\3&0&3\\0&2&0\end{bmatrix}$$

となります．

問13.1　第12回で紹介したヒーウッドグラフ H(図13.1) の交差行列を求めよ．

問13.2　図13.2に示されている5つの正多面体に対応するグラフ（すなわち正4面体グラフ T，正6面体グラフ Q_3，正8面体グラフ O，正12面体グラフ D，正20面体グラフ I) はプラトングラフと呼ばれている．

これらのグラフはすべて距離正則グラフであることを確かめて，それらの交差行列を求めよ．

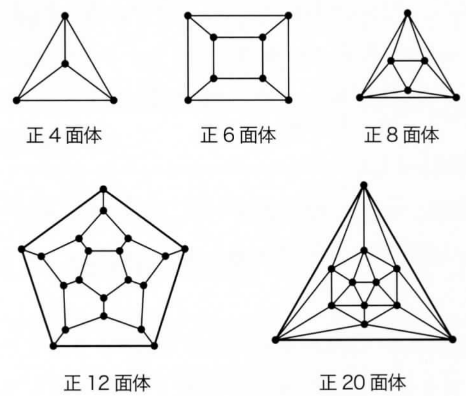

図13.2 正多面体のグラフ

次に，C_4 の交差行列の固有値を求めてみましょう．

いま，グラフ G の交差行列の固有多項式を $\phi(G;\lambda)$ で表すと

$$\phi(C_4;\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\-2&\lambda&-2\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda+2) \tag{13.1}$$

となります．

一方，C_4 の固有多項式は