

太鼓の膜の振動 // 膜の波動方程式 /  
波動方程式の極座標表示 / 円形膜の振動(前編)

半揚稔雄

今回と次回にわたり、太鼓の膜の振動問題を考えてみる。はじめに、膜の運動の観察からその運動方程式を求め、それを円形膜の振動を扱うのに適切な形式として、その極座標表示を求める。これは波動方程式と呼ばれるものになるが、その解法をとおしてベッセル関数が登場してくることがわかるであろう。今回は、波動方程式の特解を求めるところまでを述べるにとどめる。

5 太鼓の膜の振動

5.1 膜の波動方程式

膜はいたるところ面密度(単位面積当たりの膜の質量) $\rho$ の均質膜を考え、一平面内にある変形しない円形枠に張られているものとする。このとき、振動による膜の変位はわずかであるとして、それによる張力の変化は無視し、膜に生じる単位長さ当たりの張力を $S$ とする。また、つりあいの状態にあるときの膜の表面を $xy$ 面として、膜の各部の変位を $z$ で表す直角座標 $xyz$ を導入すれば(図5.1)、 $z$ は $x, y$ および時間 $t$ の関数になる。

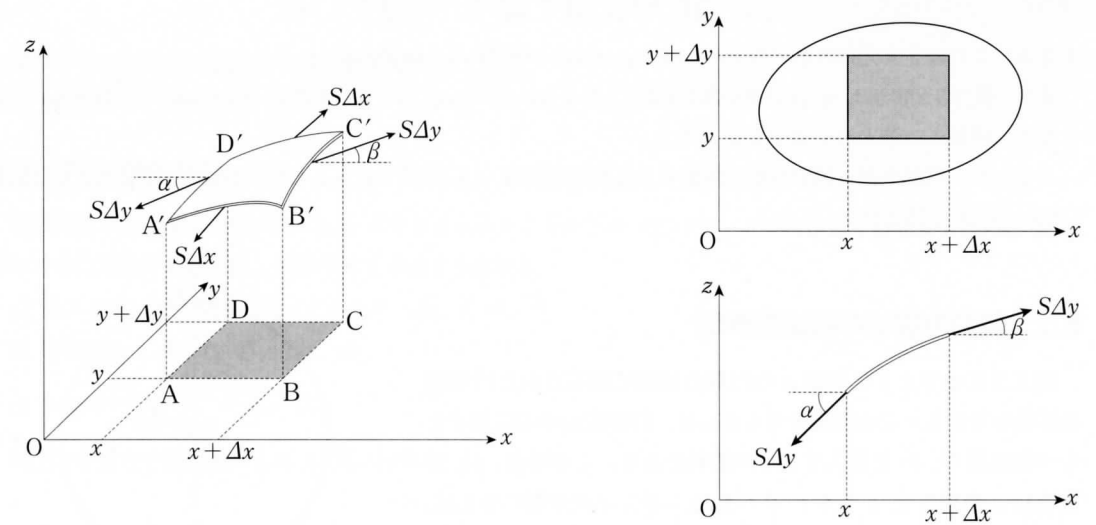


図5.1 振動する膜

いま、図5.1のように膜の微小な矩形部分 $A'B'C'D'$ に注目すると、座標 $x$ の縁 $A'D'$ での張力 $S\Delta y$ の $z$

NHK BSに「美の壺」というテレビ番組があり、私はときどき見ている。その日はパスタをテーマにしていた。どちらかというと味音痴で、料理番組には無関心であるが、パスタ製造マシーンから押し出されるコンキリエという貝殻に似たパスタの形に思わず見入ってしまった。私の年代になると、スパゲッティやマカロニは知っているが、パスタはどんな形をいうのだろうかと思う。パスタは小麦粉を練ったイタリア料理を総称して呼ぶのだそうだ。

小麦粉をよく練りパスタマシーンに入れる。強い圧力でところてん方式に生地を押し出し、適当な長さで切り取るとコンキリエやマカロニができる。出口にはダイスとよばれる口金があり、この口金の形状によりさまざまな形の pasta ができる。つまり、パスタマシンの口金が重要なカギとなっている。

口金は円筒の形をしている。出口にはさまざまな形の穴があいている。穴の形から何が出てくるのか想像してみるの面白い。単純な丸い穴から出るのはスパゲッティであり、穴の直径がスパゲッティの太さに関係することは想像がつく。でも、貝殻の形をしたコンキリエが作られる映像は実に不思議であった。口金に開けられた穴の形はへ字をしていた。さらにギザギザの波状になったへ字であった。これは貝殻の模様に関係しているのだろう。

パスタの生地は丸まりながら穴から出てくる。一定量の生地が出たところを回転カッターが切断するとコンキリエができる。でも、へ字の切り口がどうして貝殻になるのだろうか。へ字のままの長いパスタにならないのだろうか。想像がつかないので、NHKに問合せてみた。

口金は出口(表側)の形状だけでなく、パスタ生地を入れる入口(裏側)の形にポイントがある。コンキリエの口金の入口には三つの穴があり、真ん中の穴が大きく、両端の二つは小さめである。真ん中の

穴に生地がたくさん入るので、貝の中心と両端に生地の量の差が生まれ、真ん中の生地が勢い良く飛び出し、生地がぐるんと丸まる、というのだ。口金には入口と出口があり、私たちが見ているのは出口であり、入口から出口の間に工夫がしてあるということだった。コンキリエができる理由が何となくわかったが、今度はマカロニの空洞が気になった。スパゲッティの口金はわかる。ところてん式に穴から押し出された生地をそのまま切るだけだ。しかし、マカロニの場合はそんなに単純だろうか。

ちくわのように棒の回りにパスタの生地をぬって後で棒を引き抜くのだろうか。それとも太めのスパゲッティを作りそれに穴をあけるのだろうかと考えてみたが、そんなことをしては大量生産ができない。そこでマカロニの口金を観察してみる。マカロニの口金は筒のようにになっている。つまり同心円が二つあり、小さい円の内側と大きい円の外側は金属でふさがっていて、すき間からパスタの生地ができてマカロニとなる。小さい円の内側、つまり真ん中の部分の金属はどこで支えているのだろうか。ちくわでいう棒の部分はどこを支えるのかが問題である。

答えはこうだ。マカロニの口金の入口は広く、出口に向かって次第に細くなる。途中にピンが付いていて、ピンを通過するときピンによって生地は2つに分離するが、その後再びくっつく。真ん中の金属はピンによって外側とつながっている。途中で( )の状態になるが、出口は○の状態になるということだ。数学では( )は決して○にはならないが、化学や生物学の世界では、( )は○になる。離れたパスタ生地が圧力によってくっつく。数学脳しか持たない私はマカロニ製造の秘密を知って大いに勉強になった。

(にしやま ゆたか/大阪経済大学)