Mathématiques colonne 19

短三度

西山　豊

Meira Leonard という人からメールが来た．スパムメールだろうと思って消そうとしたが，タイトルが Major and Minor Chords とあったので，消すのをやめて読んでみた．私は以前に「短調について考える」という記事を『理系への数学』2010 年 1 月号にまとめ，それを英訳したものを International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.67, No. 2, 2011 に The Mathematics of Minor Keys というタイトルで発表していたが，それを読んだ読者からのメールだった．外国にも私と同じ疑問や考えを持つ人がいるものだと感心した．

音階はドレミファソラシドのドから始まるが，ドの２つ下のラから始めると短調になり，物悲しくなる．童謡の「赤い靴」「月の砂漠」，「エリーゼのために」「愛のロマンス」「トルコ行進曲」などがそれで，同じ７つの音階を使いながら音階を２個ずらすだけで曲の感じがどうしてこのように違うのだろうか．

長調のドレミファソラシドと短調のラシドレミファソラを全音(全)と半音(半)で表すと，

「全全半全全全半」と「全半全全半全全」

になる．どちらも全音の数が５個，半音の数が２個の計７個で同じであるが，半音の位置が違っている．ここに言う７音階とは，ピタゴラスの音律のことであり，１オクターブを 12 個の半音にわけ，それを５個の全音（半音の２倍）と２個の半音の組み合わせとしたものである．

$$5\times2+2\times1=12$$

ラから始めるとどうして物悲しく感じるのか．この疑問に明快に答えてくれる理論はないが，芥川也寸志『音楽の基礎』岩波新書 E57 (p67) には，短調が長調と異なる決定的な点は，基音と第三音との距離が短いこと，つまり音程がせまいことであるとしている．２つの音の高さのへだたりは音楽では度数で示される．同じ高さの音を一度としているので，ドレミのドとミは三度である．さらにドとミは全音を２つはさんでいるので長三度という．ラシドのラとドは三度であるが，全音と半音をはさんでいるので短三度という．ドレミが力強く感じるのに対してラシドが物悲しく感じるのは，半音が含まれているからかもしれない．

ドレミとミファソを重ねたドミソは和音と呼ばれる．ドとミは長三度，ミとソは短三度であるが，この和音は長和音（メジャーコード）と呼ばれる．ラシド（短三度）にドレミ（長三度）を重ねたラドミは短和音（マイナーコード）と呼ばれる．和音においても短三度がキーとなっている．短三度がベースになっている短和音は悲しく感じる．

曲は，メジャーコードとマイナーコードの組み合わせで作られる．たとえば，「旅人よ」（作詞：岩谷時子，作曲：弾厚作）はニ短調の曲であるが，マイナーコードとメジャーコードを交互に繰り返すことでできている．

風にふるえる　緑の草原 (Dm - Dm - Dm - Dm)

たどる瞳輝く　若き旅人よ (F - Gm - A7 - Dm)

すべてをマイナーコードにすれば暗く悲しい曲になるとは限らない．メジャーコードとマイナーコードのバランスによって曲は成り立ち，マイナーコードが多い曲は一般に悲しく感じる．

短調の曲は長調の曲より暗いといわれることが多いが，この説に反対する意見もある．長調の曲であっても詞によって，演奏者によって，楽器によって，時と場所によって，聞く人によって，そのときの心理状況によって悲しく感じることがある．それで，私の「短三度」説はひとつの仮説にしか過ぎない．

風の音や川のせせらぎなど自然の音には音階がなく，まして短調も長調もない．倍音（オクターブ）を 12 段階に分け，全音と半音の組合せで７音階とし，半音の位置を変えることによって曲のイメージを明るくも悲しくもできるようにしたピタゴラスの音律は実によくできているし，これが現代音楽の基礎となっているのは確かだ．

（にしやま　ゆたか／大阪経済大学）

Let's consider the problem

考えてみよう

第 17 回

カークマンの女生徒問題

一松　信

1．標題の問題について

これは組合せ構成の有名な古典的問題です．カークマン (T. P. Kirkman) が 1850 年に提出し，ケイリー (A. Cayley) が同年に最初に解答したというのが定説ですが，案外複雑な歴史があるようです．

問題 1　当時の英国で普遍的だった全寮制の女学校で，ある寄宿舎に 15 人のお嬢様方が生活している．毎日 3 人ずつ 5 組のグループに分れて共同作業をする．そのとき一週間のあいだ毎日組合せを変えて，誰も他の 14 人の誰ともちょうど一度ずつ同じグループに所属するようにせよ．

但しこの文章は数学的内容はもとのままですが，私の脚色が入っています．これが本質的に今回の設問ですが，試行錯誤ではなく多少理論的な考察を述べた後，最後に今回の設問として提出します．

2．7 人の夜警問題

この種のいわゆる「不完備つり合い型配置」を作成する課題で最も基本的なのが，次の 7 人の夜警（あるいは侍）の問題です．

問題 2　ある警備会社に 7 人の夜警が勤務している．毎夜そのうち 3 人ずつが勤務につく．1 週間のうち各自 3 夜ずつの勤務だがその組合せをうまく作って，誰しも他の 6 人の誰ともちょうど一度ずつ同じ夜に勤務するようにせよ．

この問題は夜警を**点**で表し，同じ夜に勤務する 3 人を 3 点を通る (**直**) **線**とすると，次のような「有限幾何学」の構成問題に帰着します．ここで $1^\circ-1'^\circ$, $2^\circ-2'^\circ$ が互いに「双対的」な条件になっています．

1°　どの線上にも 3 点ずつ存在する．

$1'^\circ$　どの点も 3 線ずつの上にある．

2°　どの 2 点の組に対しても両者を含む線がただ一つ存在する．

$2'^\circ$　どの 2 線の組に対しても両者に共通に含まれる点がただ一つ存在する．

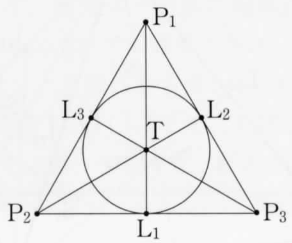

図 1

このような図形は**ファノ** (Fano) **平面**とよばれ，通例図 1 のような「点と線」で表現されます．代数幾何におなじみの方は，これは「標数 2 の有限素体 GF (2) 上の射影平面」と理解下さると思います．それが「7 人の夜警問題」の解を与えています．

3．ファノ平面の解釈

図 1 は，ファノ平面の自然な表現ですが，女生徒問題への発展を考えてもう少し検討します．

7 個の「点」のうち頂点に対応するものを P_1, P_2, P_3；それらの対辺の中点を L_1, L_2, L_3；三角形の重心を T とすると，「線」は次の 3 種に分類されます．

第 1 種　2 頂点 P_i, P_j $(i\neq j)$ とそれらを結ぶ辺の中点 L_k の集合．ここに $\{i, j, k\}$ は