

# ハンブルの予想

西山 豊

イギリスの知人, S. ハンブルは数学教育に熱心だ。彼が小学生向けに考えた数学パズルが, 実は現代数学の奥深いところに関係していて, それがニューヨーク・タイムズ紙に Triangle Mysteries というタイトルで紹介された(2013年5月13日)。

私は, 彼が考案した数学パズルに, とりこになってしまった。それはつぎのようなものである。赤, 青, 黄の三色のカードを使う。横一列に4枚のカードを色がランダムになるように並べる。たとえば,

赤, 黄, 青, 青

とする。その下にカードを並べていくが, 次の2つの規則がある。(1) となりあう2つの色が同じ色なら, それと同じ色とする。(2) 違っていたら, どちらの色とも違う第三の色とする。

この規則に従って, カードを並べてみよう。赤と黄は色が違うから, この下に来るのは青であり, 黄と青は色が違うから赤になり, 青と青は色が同じであるので青となる。このようにして下へ下へと並べていくと, つぎようになる。

赤 黄 青 青  
青 赤 青  
黄 黄  
黄

そこで最下行の色が何色になるかを, 先頭行だけで予想できるかという問題である。S. ハンブルは子供たちに遊ばせながら, あることに気づく。最下行のカードの色は先頭行の両端の色で予測出来るかもしれないと言うのだ。今の例では, 先頭行の左右両端は赤と青であり, 規則を適用すると, 色が違うから最下行は黄となり, 実際に黄色となっている。

赤 黄 青 青  
青 赤 青  
黄 黄  
黄

彼からこの話を聞いたとき, 私は半信半疑だった。そこで先頭行の色を並べ方  $3^4 = 81$  通りについて調べてみると, 彼の予想がすべてにおいて成り立っていることがわかった。それで, これを「ハンブルの予想」と呼ぶことにした。

私はパズルが好きなので, 最初に並べるカードの枚数が4枚以外で成り立つか試してみた。先頭行を5枚, 6枚としたが予想は成り立たなかった。ハンブルは10枚の時に成り立つことを教育実践の中で知っていた。カードが10枚の場合は, 色の塗り方が  $3^{10} = 59049$  通りもあるので, 検査はプログラムの力を借りねばならない。読者は  $n = 10$  の場合は是非とも試してみてください。

2つの色から新しい色が決まるということは, ある種の二項演算である。そして, 赤, 青, 黄の3つのカードは要素が3の集合であり, 3つの要素は二項演算により閉じているから群を構成している。色の順序が関係しないから可換群でもある。最下行の色は, 二項演算を何度も繰り返しながら得られるから, パスカルの三角形とも関係している。

高校数学で学ぶパスカルの三角形は左下図のようになるが, これらの値を3で割って余りを表示すると右下図のようになる。

	1			1						
	1	1		1	1					
	1	2	1	1	2	1				
	1	3	3	1	1	0	0	1		
	1	4	6	4	1	1	1	0	1	1

左右両端が1で真ん中がすべて0となる行は, 上から4行目, 10行目, 28行目…のときである。すなわち, 先頭行  $n$  が

$$n = 3^s + 1, (s = 0, 1, \dots)$$

のときにハンブルの予想が成り立つ。小学生向けの算数教材として開発されたものだが, 背景には高等数学が潜んでいる。このパズルに興味を持たれた読者は, 上記の公式がどうして導かれるか考えてください。

(にしやま ゆたか/大阪経済大学)

# フィボナッチ が学んだ数学, 伝えた数学

三浦伸夫

第8回



Leonardo Fibonacci (1170?-1240以降)  
「フィボナッチの想像上の肖像」  
(出典:『人類の巨人たち』第6巻, フィレンツェ, 1850)

## フィボナッチを巡る人々

13世紀イタリアの学問を語る場合, 重要な人物がいます。神聖ローマ帝国皇帝(1220-50), ならびにシチリア王(1197-1250)であったフェデリーコ2世(1194-1250)です。ドイツ系のホーエンシュウタウフェン家出身であったので, 歴史学などではドイツ語でフリードリヒ2世と呼ばれますが, イタリアで生まれ育ち亡くなったので, ここではイタリア語でフェデリーコ2世と呼ぶことにします。ところで彼は学問を奨励し, とりわけアラビア文化を愛好しました。実際彼はアラビア語を流暢に話すことができたと伝えられています。そのパレルモの宮廷には, 民族や宗教の違いを超えて多くの学者が集まり, 数学の話題に花咲き, それにはフィボナッチも関係しています。

今回は, フィボナッチの作品の序文を通じて当時の文化的環境を見ていきましょう。さらにフェデリーコ2世と学術交流した人々にも触れておきましょう。

## フェデリーコ2世

フェデリーコ2世の政治的手腕や歴史に関しては, カントローヴィチの浩瀚な古典的書物があります(カントローヴィチ『皇帝フリードリヒ二世』(小林公訳, 中央公論新社, 2011)。4歳で両親を亡くし, 皇帝となり十字軍に関与するも, 教会から2度も破門され「教会の敵」とまでいわれ, と波瀾万丈の生涯を終えました。しかし今

回は政治史ではなく文化史的な観点が主題です。そのための基本文献はまだハスキンスのものが, 生涯については逸話も交えて吉越氏のものが詳しく描いています。

- ・Ch. H. Haskins, *Studies in the History of Mediaeval Science*, Cambridge: Mass., 1924.
- ・吉越英之『ルネサンスを先駆けた皇帝』, 慶友社, 2009.

まずフェデリーコ2世自身の貢献について触れておきましょう。彼はある歴史家(ミケーレ・アマリ)によって「キリスト教化したスルタン」と呼ばれているように, 西洋中世では誰よりもアラビア文化に心惹かれた皇帝で, その行幸には象, ライオン, 豹, ラクダなどが伴われていたと言われています。著作で有名なのは『鷹狩り論』で, それには長短2つの版があります。そこで彼は, まずアリストテレス読解に基づき, さらに自らの経験を踏まえ, 鳥類の習慣や解剖などを「あるがままの姿」で描き, その後鷹狩りについてのアラビアの技法を紹介しています。

またフェデリーコ2世は数多くの城を建設しましたが, なかでも南イタリアのプーリア州に建設したカステル・デル・モンテ(山の城の意味)は, 8つの塔をもつ完璧な正八角形をなし, 軍用ではなくおそらく鷹狩り用として作られた特異な幾何学的建築物で, 今日世界遺産に登録されています。

さらに1224年にはナポリ大学を設立しました。これは今日, 「ナポリ・フェデリーコ2世大学」と呼ばれ, パリ大学やオックスフォード大学の誕生には遅れますが, 初期の大学としてその後