6．王国の命運は？

それでは，あらためて問題1の答えを探してみましょう．玉の数が $10(=3^2+1)$ 個なので，表2の $GF(3^2)$ で，$F(x)=x^3+x^2+x+\alpha$，原始元 $g=x$ を用いて同様に解の1つを求めると，

$$(1,3,9,11,6,8,2,5,28,18)$$

という配列が得られました．10個の玉にこの順に数字を配列すると，確かに1から91までの全ての数字が得られますが，残念ながらこれでは「13」の玉が使えないので，正解ではありません．

そこで，いろんな設定で13を含むパターンを探すと，原始元を $g=x+2\alpha+1$ とした場合に

$$(1,5,4,13,3,8,7,12,2,36)$$

という解が見つかりました．これが問題1の正解です．これで無事王国は平和を取り戻せそうですね．

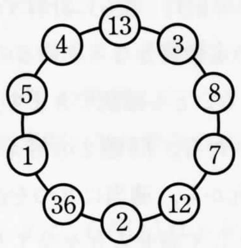

図6

玉の数 $N=p^m+1$ の魔法の首飾りの数字の配置は，原始元の取り方により，オイラー関数を使って $\dfrac{\phi(N^2-N+1)}{6m}$ 種類あると考えられています．玉が10個の場合は，$\dfrac{\phi(91)}{12}=6$ 種類存在します．

そこで，さらに解のバリエーションを調べると，全部で

(1,2,6,18,22,7,5,16,4,10)
(1,3,9,11,6,8,2,5,28,18)
(1,4,2,20,8,9,23,10,3,11)
(1,4,3,10,2,9,14,16,6,26)
(1,5,4,13,3,8,7,12,2,36)
(1,6,9,11,29,4,8,2,3,18)

の6通り（およびその逆順）が見つかりました．

以下，プログラムで探した玉の数30までの魔法の首飾りの例を1つずつ挙げておきます．全てのバリエーションのリストはWebで公開する予定です．

$N=3$, (1,2,4)
$N=4$, (1,2,6,4)
$N=5$, (1,3,10,2,5)
$N=6$, (1,2,5,4,6,13)
$N=8$, (1,2,10,19,4,7,9,5)
$N=9$, (1,2,4,8,16,5,18,9,10)
$N=10$, (1,2,6,18,22,7,5,16,4,10)
$N=12$, (1,2,9,8,14,4,43,7,6,10,5,24)
$N=14$, (1,2,13,7,5,14,34,6,4,33,18,17,21,8)
$N=17$, (1,2,4,8,16,32,27,26,11,9,45,13,10,29,5,17,18)
$N=18$, (1,2,18,4,6,37,9,14,79,7,8,11,16,13,32,12,5,33)
$N=20$, (1,2,10,15,23,14,17,4,18,8,33,56,11,5,24,20,46,32,36,6)
$N=24$, (1,2,10,28,20,24,5,4,21,22,64,6,31,8,11,7,16,46,59,36,35,32,51,14)
$N=26$, (1,2,30,12,13,22,28,6,5,10,38,14,26,64,8,19,4,20,17,29,36,18,76,9,7,137)
$N=28$, (1,2,6,18,16,38,48,44,47,23,67,77,17,5,36,10,11,4,35,14,59,30,33,12,7,13,56,28)
$N=30$, (1,2,9,10,31,23,5,40,82,16,49,18,25,4,32,26,8,85,74,55,39,17,46,14,24,6,7,20,15,88)

7．今月のFlash！

http://www.gensu.co.jp/saito/puzzle/

今月のFlashコンテンツは，魔法の首飾りの数字の配置を利用した簡単なパズルゲームを考えています．

（さいとう　ひろし）

Mathématiques colonne 22

数独盤

西山　豊

徳島県にお住まいの大久保長成さんという方からある小包が届いた．「数独盤」を試作したので意見を聞かせてほしいというのである．

数独盤は，1辺が約30センチの正方形で，厚みが約5センチのヒノキでできていて，将棋盤に似ている．9×9の位置には直径25ミリ，深さ5ミリの円形の穴があいていて（ただし穴は貫通していない），たこ焼き器を連想させる．数字が記入された81個の駒は円形で，直径が穴より少し小さく，10円玉の大きさである．厚みが約1センチであり，数独盤の穴に駒の出し入れが容易にできるようになっている．

駒の表は黒色で，裏は赤色で数字が記入されている．また，駒の収納盤（1辺が約30センチの正方形で厚みが1センチ）というのがあって，これにも81個の穴があけてある．完成した（解き終わった）数独盤の上に収納盤をひっくり返して重ねると81個の駒を一挙に収納盤に移動することができるようになっている．

実によくできている．私はこの数独盤で数独が解いてみたくなった．数独の問題集から手始めに初級問題を解いてみた．まず，既知の数を黒色の駒で埋める．そして縦，横，3×3ブロックに数字が重ならないように慎重に黒色で埋めていく．9×9の残りのどのマス目をみても数字が確定しないときがある．その場合は仮定を設ける．たとえばあるマス目に2通りの数が考えられるときは，一方の数から駒を裏返して赤色の数字で埋めていく．そして行き詰れば，この仮定が間違っていたのだから，最初の仮定まで戻ればよい．他方の数は仮定ではなく確定になるので，この場合，駒は黒色にして進めていく．

このようにして，初級，中級問題は容易に解けた．そこで上級問題に進む．上級問題は既知の数が最も少ない17個であることが多く，また仮定が3段階に及ぶことがある．このような難解な数独に対して数独盤は有効であるかどうかである．

数独の解き方，遊び方は人さまざまであろう．紙と鉛筆で解く場合は，間違った数字を消しゴムで消しながら進むので，仮定が3段階ともなると大変だ．スマートフォンで解く場合は，仮定とそのプロセスをすべて脳の記憶に頼らざるを得ないので，紙と鉛筆よりさらに大変だ．よって上級問題はパソコンの表計算ソフト向きであると結論付けて，私は数独から卒業したつもりだった．

数独盤による解き方には色々な長所がある．前述のように駒の表裏には黒と赤で数字が記入されていて，赤色は仮定として使える．駒を穴に置く場合は表裏だけでなく，垂直に置いたり，斜めに置いたりすることができる．木製の駒のアナログ的な性質であろう．置き方を工夫すれば3段階の仮定も問題なくクリヤーできる．また，駒の全数が81個であるので，駒の残りが各数について何個ずつであるかが一目瞭然である．これは数独を解く場合の大きなヒントになる．将棋では持ち駒に対応する．

数独は二コリ社の商品名であるが，いまや公用語となってしまったが，1979年にニューヨークではナンバー・プレイスと呼ばれていた．世界的に広まったのは2005年5月にイギリスの一流新聞ガーディアンなどにSudokuが掲載されたことによる．まさにその時，私はイギリスに留学していて，その様子を知ることができた．帰国後に雑誌『数学セミナー』2006年5月号に「Sudokuがイギリスで大ブレイク」という記事をまとめたが，日本やアジアで急速に広まるのは2006年以降になる．

大久保さんは数独盤を30個ほど製作して知人に贈られたそうである．私は，このような優れものを商品にしてみればと思い，インターネットで調べてみると，類似のものがすでに売られていた．駒は円形ではなく正方形であった．売れる，売れないは別として，数独盤は囲碁や将棋と同じように，全国の公民館や集会所に置いてみてはどうだろうか．

（にしやま　ゆたか／大阪経済大学）