

西山 豊

数学を楽しむ 三角形三色問題

1. 不思議な三角形

イギリスのステーブ・ハンブルが面白い問題を知らせてきた。図1のような逆三角形がある。最上行の10個は3つの色(赤, 黄, 青, ただし印刷の都合で白, 灰, 黒とする)でランダムに塗られている。2行目からはつぎの規則で色を塗っていく。

- (1) 隣り合せる2つの色が同じであるなら, それと同じ色にする。
- (2) 2つの色が異なるなら, どちらとも違う第3の色にする。

このようにして色を下へ下へと塗っていったとき, 最下行(三角形の頂点)の色が何色になるかを予測するという問題だ。

この答えは, すべての行の塗り分け作業をわざわざしなくても, 最上行の左右両端の色を見るだけで予測できるという意外性がある。図1では最上行の左端は白色で右端は灰色だから, 前述の塗り分けの規則を適用すると黒色と予測され, 実際に最下行は黒色になっている。最上行の要素は10個であるから, 塗り方は全部で $3^{10} = 59049$ 通りあるが, 途中の色の生成パターンと関係なく, このような予測方法が成り立っていると彼は言う。

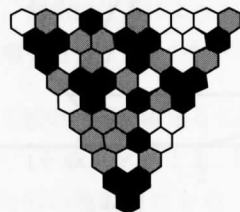


図1

この言葉に半信半疑ながら, 私は色々試してみた。最上行の個数を n とすると, $n=2$ は自明であるが, $n=4$ でも成り立つことがわかった。 $n=10$ の場合は, 何となく成り立っているようだが, 59049通りのすべてのパターンをチェックしたわけでもない。そこでパソコンの力を借りることにした。簡単なプログラムを作成して $n=10$ の59049通りについて調べてみると, すべてのパターンで予測が成り立っていることがわかった。

$n=2, 4, 10, \dots$ と続くと, この先はどうなるのかと興味をわいてきた。プログラムを改良して, さらに調べると $n=28$ のときも成り立つことがわかった。 $n=2, 4, 10, 28, \dots$ と並ぶ数列は, 後ほど

$$n = 3^s + 1, (s = 0, 1, \dots)$$

という公式で表されるが, この時点では公式には結びつかなかった。

また, これ以外の $n=3, 5, 6, 7, \dots$ などは, 予測が成立しないが, それぞれにおいて, 予測が成り立つケースが三分の一であり, 予測が成り立たないケースが三分の二という不思議な結果もわかった。これについては, その理由が分かっていない。

2. アーベル群

$n=10$ の場合の59049通りについて, パソコンですべてを調べあげるという方法もあるが, エレガントではない。 $n=4$ も $n=10$ も原理は同じなので, ここでは, $n=4$ の場合について,

エレガントな証明を与えよう。

色は白, 灰, 黒の三色とする。三色のうちどの色を基準にしても同じであるが, ここでは白を基準としておく。そして, 白を0, 灰を1, 黒を2というように, 各色に数字を対応させておく。さらに, 三色は白, 灰, 黒, 白, 灰, 黒, ...というように循環するものとする。数字では, $0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$ というように循環する。数は $0, 1, 2$ の3つしかなく, 3つの数が $\text{mod } 3$ で循環しているともいえる(図2)。

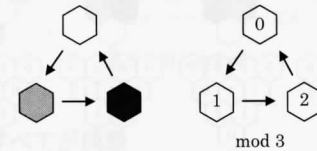


図2. 3色の循環

さて, 色塗りの規則を表に整理してみる。白と白の場合は白, 灰と灰の場合は灰, 黒と黒の場合は黒, 白と灰の場合は黒, 灰と黒の場合は白であるから表1のようになり, ふたつの色の演算(*)と捉えると, 白, 灰, 黒の三色が演算に関して閉じていて群をなしていることがわかる。また, 白と灰の場合は黒, 灰と白の場合も黒であるから, 同じ群でも可換群であることがわかる。つまり, 色塗りの演算はアーベル群の一例となっている。色の演算と数の演算を対比させておいた。

	白	灰	黒		0	1	2
白	白	黒	灰	0	0	2	1
灰	黒	灰	白	1	2	1	0
黒	灰	白	黒	2	1	0	2

表1. アーベル群(可換群)

逆三角形の要素は, 上から4個, 3個, 2個, 1個であるが, 行列の要素として次のように定義しておこう。上から i 行目, 左から j 列目の要素を a_j^i で表すこととする。 $n=4$ の場合は, 最上行の1行目が $(a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1)$ であり, 2行目は (a_1^2, a_2^2, a_3^2) であり, 3行目は (a_1^3, a_2^3) であり, 最下行の4行目が (a_1^4) である。さて, 最上行がすべて白色の場合を考えてみよう。2行目,

3行目, 最下行はすべて白色となり, 最上行の左右両端は白と白, 最下行は白で, 規則を満たしている。数式では

$$\begin{aligned} (a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1) &= (0, 0, 0, 0), \\ (a_1^2, a_2^2, a_3^2) &= (0, 0, 0), \\ (a_1^3, a_2^3) &= (0, 0), \\ (a_1^4) &= (0) \end{aligned}$$

となり, 最下行 $(a_1^4) = (0)$ は, 最上行の両端 $(a_1^1, a_4^1) = (0, 0)$ で決まるとなる(図3)。

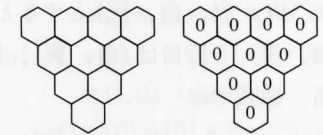


図3. 最上行がすべて白

3. 基本パターン

$n=4$ の場合の塗り分けのパターンは全部で $3^4 = 81$ 通りあるが, 次の4つの基本パターンに分解される。逆に, 4つの基本パターンですべての塗り分けパターンを生成できることを示していこう。

最上行が(灰, 白, 白, 白)とすると, 2行目は(黒, 白, 白), 3行目は(灰, 白), 最下行は(黒)となる。数式では

$$\begin{aligned} (a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1) &= (1, 0, 0, 0), \\ (a_1^2, a_2^2, a_3^2) &= (2, 0, 0), \\ (a_1^3, a_2^3) &= (1, 0), \\ (a_1^4) &= (2) \end{aligned}$$

となり, このようなパターンを基本パターン1とする。

最上行が(白, 灰, 白, 白)とすると, 2行目は(黒, 黒, 白), 3行目は(黒, 灰), 最下行は(白)となる。数式では

$$\begin{aligned} (a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1) &= (0, 1, 0, 0), \\ (a_1^2, a_2^2, a_3^2) &= (2, 2, 0), \\ (a_1^3, a_2^3) &= (2, 1), \\ (a_1^4) &= (0) \end{aligned}$$

となり, このようなパターンを基本パターン2とする。

最上行が(白, 白, 灰, 白)とすると, 2行目は(白, 黒, 黒), 3行目は(灰, 黒), 最下行は(白)となる. 数式では

$$\begin{aligned}(a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1) &= (0, 0, 1, 0), \\ (a_1^2, a_2^2, a_3^2) &= (0, 2, 2), \\ (a_1^3, a_2^3) &= (1, 2), \\ (a_1^4) &= (0)\end{aligned}$$

となり, このようなパターンを基本パターン3とする.

最上行が(白, 白, 白, 灰)とすると, 2行目は(白, 白, 黒), 3行目は(白, 灰), 最下行は(黒)となる. 数式では

$$\begin{aligned}(a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1) &= (0, 0, 0, 1), \\ (a_1^2, a_2^2, a_3^2) &= (0, 0, 2), \\ (a_1^3, a_2^3) &= (0, 1), \\ (a_1^4) &= (2)\end{aligned}$$

となり, このようなパターンを基本パターン4とする.

これら4つの基本パターンは最上行の両端と最下行の頂点の色の関係で規則を満たしている(図4).

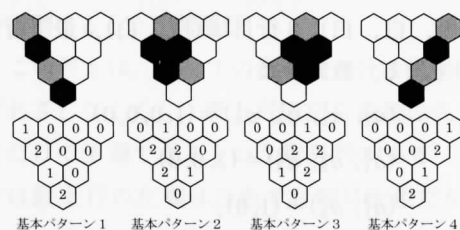


図4. 4つの基本パターン

4. 基本パターンの変形

この基本パターンの変形として, 最上行の灰を黒に変えたものが考えられる. たとえば, 最上行が(黒, 白, 白, 白)の場合は, 2行目は(灰, 白, 白), 3行目は(黒, 白), 最下行は(灰)となる.

数字の計算では, 図4の基本パターン1のすべての要素を2倍し, 数が2より大きくなった場合は3で割ってその余りを値とする. つまり

mod 3 で計算することによって得られる.

$$\begin{aligned}(a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1) &= (1, 0, 0, 0) \times 2 = (2, 0, 0, 0), \\ (a_1^2, a_2^2, a_3^2) &= (2, 0, 0) \times 2 = (4, 0, 0) \\ &\equiv (1, 0, 0) \pmod{3} \\ (a_1^3, a_2^3) &= (1, 0) \times 2 = (2, 0), \\ (a_1^4) &= (2) \times 2 = (4) \equiv (1) \pmod{3}\end{aligned}$$

同様に, 最上行が(白, 黒, 白, 白), (白, 白, 黒, 白), (白, 白, 白, 黒)のものを作成すると図5(1)~(4)になる.

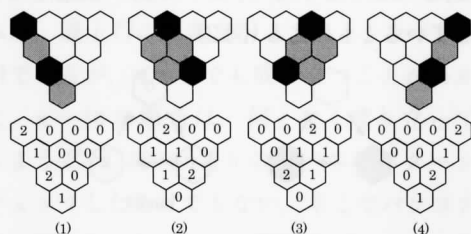


図5. 基本パターンの変形

5. 重ね合わせ

ここでは, $n=4$ の場合の $3^4=81$ 通りのすべてのパターンが, 4つの基本パターンで生成されることを示そう.

例1 白に灰

白に灰がいくつか混じっている場合を考えてみよう. いま仮に, 最上行が(灰, 白, 灰, 白)のように灰が2個混じっていたとする. これは基本パターン1(灰, 白, 白, 白)と基本パターン3(白, 白, 灰, 白)の合成として表される. その計算は各行の要素の値を合計することによって求まる. 数式では

$$\begin{aligned}(a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1) &= (1, 0, 0, 0) + (0, 0, 1, 0) \\ &= (1, 0, 1, 0) \\ (a_1^2, a_2^2, a_3^2) &= (2, 0, 0) + (0, 2, 2) = (2, 2, 2) \\ (a_1^3, a_2^3) &= (1, 0) + (1, 2) = (2, 2) \\ (a_1^4) &= (2) + (0) = (2)\end{aligned}$$

となる(図6).

基本パターンの合成は sin 波の合成のように「重ね合わせの原理」が成り立っている. 基本パターンは互いに独立していて, 合成に関しては独立に作用する. 4つの基本パターンは位相のず

れた sin 波のようでもあり, 周波数の異なる sin 波のようでもある. 基本パターンの変形は振幅が2倍の sin 波のようでもある. それぞれの sin 波は重ね合わせの原理で, 要素の値を単純に足すことができる.

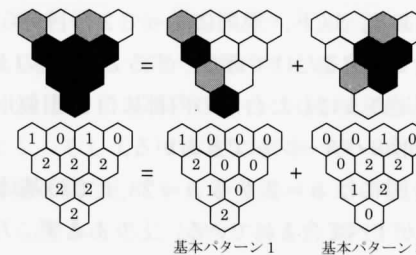


図6. 重ね合わせ

例2 すべてが灰色

2つの基本パターンを重ねる例を示したが, 4つの基本パターンすべてを重ね合わせると, すべてが灰のパターンとなることを示そう(図7). これはすべての周波数が同じ強度であるホワイトノイズに似ている. 数式では,

$$\begin{aligned}(a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1) &= (1, 0, 0, 0) + (0, 1, 0, 0) \\ &\quad + (0, 0, 1, 0) + (0, 0, 0, 1) \\ &= (1, 1, 1, 1) \\ (a_1^2, a_2^2, a_3^2) &= (2, 0, 0) + (2, 2, 0) + (0, 2, 2) \\ &\quad + (0, 0, 2) = (4, 4, 4) \\ &\equiv (1, 1, 1) \pmod{3} \\ (a_1^3, a_2^3) &= (1, 0) + (2, 1) + (1, 2) + (0, 1) \\ &= (4, 4) \equiv (1, 1) \pmod{3} \\ (a_1^4) &= (2) + (0) + (0) + (2) \\ &= (4) \equiv (1) \pmod{3}\end{aligned}$$

となる. 同様に, すべてが黒のパターンを生成することもできる. 計算では4つの基本パターンをそれぞれ2倍して, それを合計したものであるが, 読者は各自確かめること.

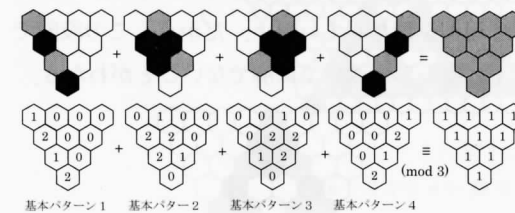


図7. すべてが灰

例3 白に灰と黒

白に灰と黒が混じる, つまりすべての色が含まれる場合を考えてみよう. 最上行が(白, 灰, 黒, 灰)とすると, これは基本パターン2(白, 灰, 白, 白)の2倍と, 基本パターン4(白, 白, 白, 灰)の合成として表せる. 計算式では,

$$\begin{aligned}(a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1) &= (0, 1, 0, 0) + (0, 0, 1, 0) \times 2 \\ &\quad + (0, 0, 0, 1) = (0, 1, 2, 1) \\ (a_1^2, a_2^2, a_3^2) &= (2, 2, 0) + (0, 2, 2) \times 2 + (0, 0, 2) \\ &= (2, 6, 6) \equiv (2, 0, 0) \pmod{3} \\ (a_1^3, a_2^3) &= (2, 1) + (1, 2) \times 2 + (0, 1) = (4, 6) \\ &\equiv (1, 0) \pmod{3} \\ (a_1^4) &= (0) + (0) \times 2 + (2) = (2)\end{aligned}$$

となる(図8).

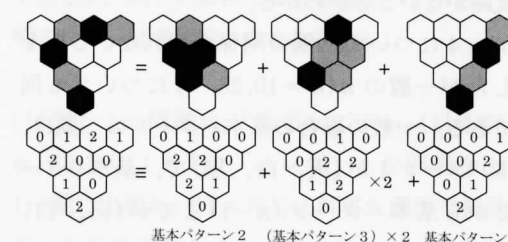


図8

6. 三隅の関係

$n=4$ の場合の $3^4=81$ 通りについて, これらは4個の基本パターンの合成として表せることを示したが, これらの基本パターンを重ね合わせた場合, 予測のための条件が崩れないだろうか. そこで, 最上行の左右両端と最下行の頂点の三隅(左端, 右端, 底) (a_1^1, a_4^1, a_1^4) の色の関係を調べてみよう.

基本パターン1は(灰, 白, 黒), 基本パターン2と基本パターン3は(白, 白, 白), 基本パターン4は(白, 灰, 黒)である. 基本パターンの変形では, 上記のそれぞれに対して(黒, 白, 灰), (白, 白, 白), (白, 黒, 灰)である. 基本パターン2と基本パターン3はすべて白なので除外して考えることができるので, 基本パターン1の(灰, 白, 黒)とその変形の(黒, 白,

灰)と、基本パターン4の(白, 灰, 黒)とその変形の(白, 黒, 灰)を掛けあわせた4通りをチェックするだけでよいことになる(図9の(1)(2)と(4)(5)).

(灰, 白, 黒)+(白, 灰, 黒)=(灰, 灰, 灰),
 $(1,0,2)+(0,1,2)=(1,1,4)\equiv(1,1,1) \pmod{3}$
 (灰, 白, 黒)+(白, 黒, 灰)=(灰, 黒, 白),
 $(1,0,2)+(0,2,1)=(1,2,3)\equiv(1,2,0) \pmod{3}$
 (黒, 白, 灰)+(白, 灰, 黒)=(黒, 灰, 白),
 $(2,0,1)+(0,1,2)=(2,1,3)\equiv(2,1,0) \pmod{3}$
 (黒, 白, 灰)+(白, 黒, 灰)=(黒, 黒, 黒)
 $(2,0,1)+(0,2,1)=(2,2,2)$
 のように、基本パターン1と基本パターン4を重ね合わせても、三隅の関係は維持され、予測に支障がないことがわかる。

$n=4$ について三隅の関係が崩れないことを示したが一般の $n(n=10, 28, \dots)$ についても同様である。一般の場合の基本パターンの三隅は、基本パターン1が(灰, 白, 黒)で、基本パターン2から基本パターン $(n-1)$ までが(白, 白, 白)であり、基本パターン n が(白, 灰, 黒)である。したがって、この場合も基本パターン1と基本パターン n の重ね合わせについて検討するだけでよく、三隅の関係は崩れなく予測に支障がない。

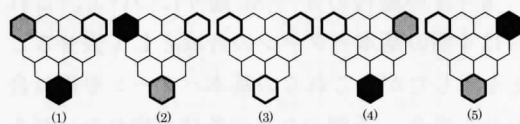


図9. 基本パターンの三隅

7. フラクタル構造

三角形三色問題を解くためには、基本パターンが重要であり、基本パターンの三隅がどうなっているかを知ることがカギとなっている。

一般の n について、基本パターンを効率よく描くことはできないだろうか。試行錯誤の末、私は非常によいアイデアを思いついた。図10は私が考案した万能チャートである。これによると $n=2$ から $n=28$ までの基本パターンすべて

を一目で知ることができる。

万能チャートの作成方法は次のとおりである。まず最上行に $27+1+27=55$ 個の配列を用意する。そして左側の27個に白、中央の1個に灰、右側の27個に白を配置する。これだけで十分である。以下、規則に従って2行目から28行目までを塗るだけである。すると図10のような上下逆さまにした台形の内部に自己相似形の正三角形のパターンができあがる。

この図には $n=2$ から $n=28$ までの基本パターンがすべて含まれている。とりあえず、万能チャートから $n=4$ の基本パターンを読みとる方法を説明しよう。図10の最上行の中央部分から図11のような形を抜き取る。上底が7、下底が4、高さが4の等脚台形である。そして、この図の右側から左側に向かって、1辺が4の逆正三角形をずらしながら4個抜き取っていく。これが $n=4$ の基本パターンとなっている(図12)。

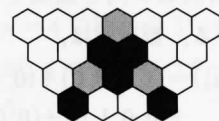


図11. 基本パターン作成チャート($n=4$)



図12. 基本パターン($n=4$)

同じようにして万能チャートから $n=5$ の基本パターンを知ることができる。図13のように基本パターン作成チャートを抜き取り、右側から基本パターンを読みとっていくと図14となる。

$n=5$ の場合の5つの基本パターンについて三隅(左端, 右端, 底)の関係に注目すると、規則を満たしているのは図14(3)だけであり、それ以外は規則を満たしていない。だから、この段階ですでに $n=5$ については解でないことがわかる。

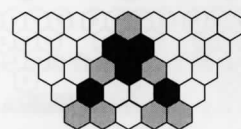


図13. 基本パターン作成チャート($n=5$)

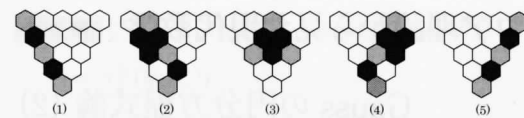


図14. 基本パターン($n=5$)

万能チャートから基本パターンを読みとるには少し訓練がいるが、慣れてくると $n=2$ から $n=28$ までの基本パターンが読みとれるようになる。そして、すべての基本パターンが三隅の規則を満たしているかを調べるだけで、解を図から読みとることができる。図10からは、 $n=2, 4, 10, 28$ の4つの解を見つけることができる。もっと大きな万能チャートを作成してもよいが、図形の規則性(自己相似形)に気づくと、このつぎの解は、 $n=81, 244, 730, \dots$ となることが想像できる。つまり、三角形三色問題の解は、次式となる。

$$n=3^s+1, (s=0, 1, 2, \dots)$$

さて、この図10の万能チャートは何か似ていないだろうか。そう、シェルピンスキーのギャスケット(Sierpinski gasket)とよばれるフラクタル図形である(図15)。この図形は自己相似的な無数の三角形からなり、ポーランドの数

学者ヴァツワフ・シェルピンスキーにちなんで名づけられている。万能チャートはフラクタル図形であり、したがって解はフラクタル構造を持つ。三角形三色問題はアーベル群、重ね合わせの原理を経てフラクタル幾何学までたどり着いたことになる。

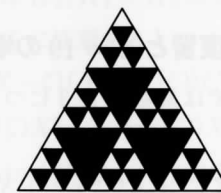


図15. シェルピンスキーのギャスケット

冒頭の問題に戻って、図1は $n=10$ のケースであるが、図8の要領で4つの基本パターンに「分解される。読者は確かめてみること。

[付記] この問題は、『数学セミナー』(日本評論社)2013年1月号の「エレガントな解答をもとむ」欄に出題し、同4月号に解答と講評を掲載していますのであわせてご覧ください。この記事と別の証明法が二通りあります。

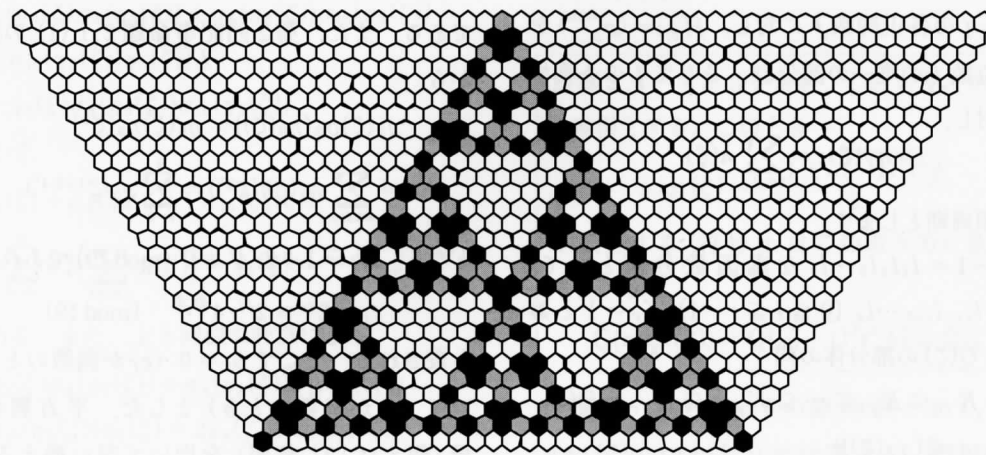


図10. 万能チャート
($n=2$ から $n=28$ までの基本パターンが作成できる。)

(にしやま ゆたか/大阪経済大学)