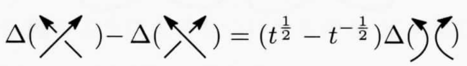
次の定理の成立が知られている．

定理1　K_1 と K_2 が素な結び目なら，
$G(K_1)=G(K_2)\Longrightarrow K_1=K_2$
が成り立つ．つまり，結び目群は，素な結び目に対しては完全な不変量である．

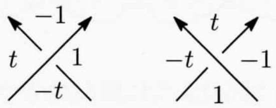
証明は $G(K_1)=G(K_2)\Longrightarrow X(K_1)=X(K_2)$ の部分と $X(K_1)=X(K_2)\Longrightarrow K_1=K_2$ の部分に分かれる．後者は素でなくても成り立つ．1980年代の結果である．

素でない結び目だと，この定理は成立しない．
例えば，前頁の図で $G(T\#T)=G(T)*_{\mathbb{Z}}G(T)$，$G(T\#T^*)=G(T)*_{\mathbb{Z}}G(T^*)=G(T)*_{\mathbb{Z}}G(T)$ となり，両者は同型である．ここで $*_{\mathbb{Z}}$ は融合積と呼ばれる．$\mathbb{Z}$ の生成元の $G(T)$ や $G(T^*)$ への入り方に依存して決まるので，この書き方はやや不適切かもしれない．
結び目群は一致するが，$T\#T$ と $T\#T^*$ は，符号数と呼ばれる不変量が異なるので，別の結び目である．

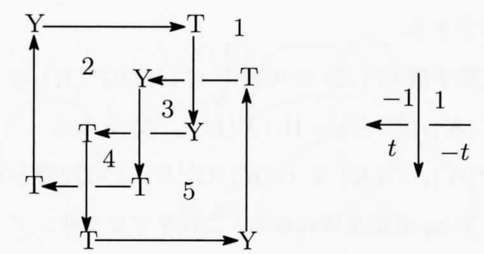
アレクサンダー多項式の計算法には，1928年の論文にあるように，糸巻き (skein) 関係式



を利用するものや，立体交差の部分に以下のように文字を置いて行列を作る方法などがある．



もし，スケイン関係式が，図を用いてわかり易く論文に書いてあったなら，ジョーンズ多項式の発見が半世紀ほど早くなったかも！
後者の計算法を図4で例示する．
① 立体交差に右上から $i=1,2,3$ と番号を振る．図式で区切られた5つの領域に $j=1,2,\cdots,5$ と番号をうつ．

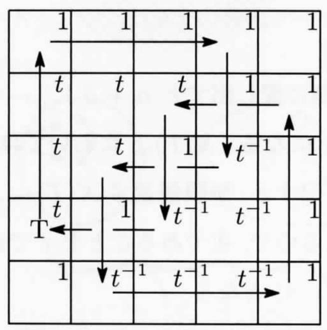


② 置かれた文字を ij 成分に書き行列を作る．文字 (交差点) がないときは0を書く．③ 隣合っている領域に対応する2本の列を除く．以下では，1列めと5列めを除いた．④ 行列式を計算．

$$\begin{pmatrix}1&-1&t&0&-t\\0&-1&1&t&-t\\t&-1&0&1&-t\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&t&0\\-1&1&t\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

より $-t^2-t-1=-t(t-1+t^{-1})$．

最後に，方眼図式を使った別の計算法を紹介する．21世紀になってから発見 (再発見？) された方法である．
① 方眼図式の各交差点で，自分の回りを結び目や絡み目が合計で何周回っているかを符号付きで数える．普段とは異なり，時計回りの方を正の向きとする．(後日，結び目フレーアーホモロジー HFK を考える都合である.) ② a 周回っている場合は，交差点に t^a を書く．③ できた行列の行列式を計算する．④ 方眼図式の大きさが n の場合は $(1-t)^{n-1}$ で割る．



絡み目なら，各円周毎に別の文字を使えばよい．t^a の代わりに，n 個の点を打つと，HFK の鎖 CFK の生成元になる．　(いけだ　かずまさ)

Mathématiques colonne 24

$1+2+3+4+\cdots=-\dfrac{1}{12}$

西山　豊

なんとも奇妙な数式である．大栗博司『大栗先生の超弦理論入門』(講談社ブルーバックス) を読んでいたら，その111ページに標記のような式があった．左辺は単調増加で無限大に発散するはずである．ところが無限大どころか負の値になるというのだ．ネットで調べてみたら，同じような式があった．

$$1+8+27+64+\cdots=\frac{1}{120}$$

この式は超弦理論で使われていて，カシミール効果という物理現象が1997年にラモローらによって実証されたという．

よく知られているように，調和級数は無限大に発散する．

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\infty$$

この式は，積み木問題としても登場する．つまり，積み木を横にずらして上に積んでいったとき，どこまでずらすことができるかという問題で，下から2分の1,3分の1，4分の1とずらして積むといくらでもずらして積むことができる．無限大に発散する速度は log のオーダーであるので遅いが，理論的には無限にずらすことができる．

また，オイラーが1735年に証明したバーゼル問題は有名である．調和級数の各分母を自乗すると，この級数は $\frac{\pi^2}{6}$ に収束するのである．

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

ここまでは，大学1～2年生までの数学で，常識の範囲内である．大学3～4年生になるとゼータ関数という新しい数学を学ぶ．s を複素数としてつぎの式 $\zeta(s)$ を考え，

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$$

これをゼータ関数とよぶ．

実数の範囲では，$s>1$ では有限な値をとり，$s\leqq 1$ では無限大に発散するので，関数の定義域は $s>1$ なるが，オイラーは次のような手法で $\zeta(s)$ の定義域を拡張した．

初項1，公比 x の無限等比級数はつぎの式となる．

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x} \qquad (1)$$

この式が成り立つのは $|x|<1$ であり，$|x|\geqq 1$ では成り立たない．そこでオイラーは次のように考えた．確かに $x=1$ を代入すれば右辺の分母は0になり，無限大となる．ところが，$x=-1$ を代入すると，次のようなそれなりの関係式となる．

$$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2} \qquad (2)$$

(1)式の両辺を微分した式は(3)となり，

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2} \qquad (3)$$

この式に $x=-1$ を代入すると

$$1-2+3-4+\cdots=\frac{1}{4} \qquad (4)$$

となる．(4)式と

$$\begin{aligned}&1-2+3-4+\cdots\\&=(1+2+3+4+\cdots)-2\times(2+4+\cdots)\\&=-3\times(1+2+3+4+\cdots)\end{aligned}$$

により，冒頭の

$$\zeta(-1)=1+2+3+4+\cdots=-\frac{1}{12}$$

が導出される．このような手法を解析接続という．

オイラーが考案した関数の定義域の拡張方法を，後にリーマンがゼータ関数として確立した．このことにより，ゼータ関数 $\zeta(s)$ は $s=1$ 以外のすべての複素数で有限の値を持ち，定義されることになる．

このような関数の拡張方法は非ユークリッド幾何学が誕生した経過に似ている．ユークリッド幾何学の第五公準である平行線に関する公準を否定することで非ユークリッド幾何学が生まれるが，両者が矛盾なく同時に成り立つことを考えると，解析接続で拡張されたゼータ関数も不思議ではなくなる．

(にしやまゆたか／大阪経済大学)