6.6　$P=13$ のときの弱弱完全数

表 13：$P=13$

$2e+1$	$Q=(13^{2e+1}-1)/12$	分解	a
3	183	3*61	30927
5	30941	30941	883705901
7	5229043	5229043	25239591813787
9	883708281	A	B
11	149346699503	C	D
13	25239592216021	E	F
15	4265491084507563	G	H
17	720867993281778161	I	J
19	121826690864620509223	K	L
21	20588710756120866058701	M	N
23	3479492117784426363920483	O	P
25	588034167905568055502561641	Q	R
27	99377774376041001379932917343	S	T
29	16794843869550929233208663030981	U	V
31	2838328613954107040412264052235803	W	X
33	479677535758244089829672624827850721	Y	Z

$A=3^2*61*1609669$

$B=720867993213800601$

$C=23*419*859*18041$

$D=20588710756109377851047$

$E=53*264031*1803647$

$F=588034167905566113995468101$

$G=3*61*4651*30941*161971$

$H=16794843869550928905093964222707$

$I=103*443*15798461357509$

$J=479677535758244089774221240729252401$

$K=12865927*9468940004449$

$L=13700070098791209449615908553795581328767$

$M=3*43*61*337*547*2714377*5229043$

$N=391287702091575733090746033697803929523057501$

$O=1381*2519545342349331183143$

$P=11175568059437494512804842434187269399079517489227$

$Q=701*9851*30941*2752135920929651$

$R=319185399345594280780219112362033386548297277812147401$

$S=3^3*61*650971*1609669*57583418699431$

$T=9116254190709518253363838069456302175911679184810336544087$

$U=1973*2843*3539*846041103974872866961$

$V=260369335940854550834324579101958487505450742744381795527146101$

$W=311*1117*8170509011431363408568150369$

$X=7436408603806746826379144303731073041582189762751733789770879453347$

$Y=3*23*61*419*859*18041*17551032119981679046729$

$Z=212391266133324496108214740458863183339538614689722045030030778150037601$

```
2?-Ais(13^20-1)/12.
A=1583746981240066619900
```

（いいたか　しげる／学習院大学名誉教授）

単位分数の和が 1（その 2）

西山　豊

1.　$n=42$ に対する 27 通りの解

20 年以上も考え続けている問題がある．それは 1 を単位分数の和に分割するとき，分母が 2 桁以下の異なる数に限定すれば，最大何個の単位分数となるかという問題だ．これを式で表せば，つぎのようになる．

a_i を $0<a_1<a_2<\cdots<a_n\leqq 99$ である自然数とするとき，

$$1=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$$

を満たす n の最大数を求めよ．たとえば

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

ならば，$n=3$ である．

この問題は 20 数年前に『数学セミナー』の「エレガントな解答をもとむ」に出題したのが最初である[1]．その時の読者の解答は，単位分数の組み合わせの違いはあっても $n=42$ が最大であった．そして，$n=42$ が最大であり $n=43$ が存在しないかを証明した人は誰もいなかった．それ以来，私は長い間，この問題にいつか決着をつけねばと気になっていた．

そしてこの問題の解決に向けて大きな前進があった．東京都にお住いの西山輝夫さんから，項の数が 42 個の場合は 25 通りの解があるという手紙を頂いた．その方法は以下の通りである．まず 2 桁の数について解に関係する数と，関係しない数にわけるのである．これは経験的なもので，試行錯誤で解を求めた過程で一度でも出てきた数を，「使える数」とする．それはつぎの 50 個である．

13, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 26,
27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39,
40, 42, 44, 45, 48, 50, 52, 54, 55, 56,
57, 60, 63, 65, 66, 70, 72, 75, 76, 77,
78, 80, 84, 85, 88, 90, 91, 95, 96, 99

50 個の中から 7 個を除いて 43 個として，それらの単位分数の和が 1 になるかを調べる．その結果，7 個のぞいて 43 個の合計が 1 になる例はなく，8 個のぞいて 42 個の合計が 1 になる例は 25 通り見つかったという．

すべての数に注目するのではなく，使える数と使えない数に分けたのは氏のアイデアであり，私の方で確認してみたところ，これら 25 通りの解が正しいことがわかった．

「エレガントな解答をもとむ」の出題に対して，解答者のひとり森茂氏は $n=42$ に対して 27 通りの解があると示された[1]．ただし詳細は示されていなかった．それで，私は 25 通りではなく，あと 2 通りの解があるのではと考えた．

西山輝夫氏は，14 と 16 は，今までの例に現れていないので使える数から省いたとしている．しかし，3 項分解で，

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{14}+\frac{1}{35}+\frac{1}{90}$$

のように，14 は単位分数分解の過程で右辺に現れる数であるので，使える数に 14 を加えて 51 個とし，その中から 9 個除いて計算することにした．

すると 14 を含む別の解がひとつ見つかった．これで 26 通りの解が見つかったことになるが，森茂氏の言う 27 通りが正解だとすると，あと 1

通りは何なのだろうか．使える数51個に何を加えればよいのだろうか．使える数を10から99の90個として，そこから48個除いて求める方法もあるが，自分のパソコンの性能では不可能であるし，このような強引な方法は数学愛好家としては避けたいものだ．

どの数を使える数として加えたらよいのか．いくら思案してもよい方法が見つからない．それで，この問題で以前に手紙を頂いた，新潟県にお住いの大関浩二さんに尋ねてみることにした．すると，すぐに返事のメールが来て，さらに別の解を教えていただいた．それは1/12の項が含まれた解，つまり使える数に12を加えたものであった．$\frac{1}{13}$ より値が大きい数 $\frac{1}{12}$ であった．

以上，使える数51個に12を加えた52個とし，52個から10個除いて残りの42個の単位分数の和が1になるかを計算すると，27通りの解が見つかった．これで森茂氏が解は27通りあるとしたことに一致したことになった．

2. 使える数と使えない数

使える数を52個としたが，それでは使えない数の47個はどのような数であろうか．

1から99までの数は99個ある．このうち1から11までの11個の数は，最初から「使えない数」として除外することにする．なぜなら $\frac{1}{1}$ は $n=1$ のみの解であり，$\frac{1}{2}$，…，$\frac{1}{11}$ は値が大きく，数として採用されると単位分数の項を増やすためには貢献しないからだ．それで12以上の数を検討するのが妥当である．全体が99個で，最初から除外するのは11個，使える数は52個であったので，

$$99-11-52=36\text{ 個}$$

が使えない数である．この36個を示すとつぎのようになる．

16, 23, 25, 29, 31, 37, 41, 43, 46, 47,
49, 51, 53, 58, 59, 61, 62, 64, 67, 68,
69, 71, 73, 74, 79, 81, 82, 83, 86, 87,
89, 92, 93, 94, 97, 98

この36個にはどのような数が含まれているのだろうか．まず，素数に注目すると，23以上の素数はすべて使えない数となる．その個数はつぎの17個である．

23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61,
67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

これ以外に素数は13，17，19の3個があるが，これらは $\frac{1}{13}$，$\frac{1}{17}$，$\frac{1}{19}$ として単位分数の分解過程で現れる．素数が使えるのは19までということになる．

また，素数ではないが，素数 p の2倍，3倍，4倍 $(2p,\ 3p,\ 4p)$ に使えない数がある．それらは以下の13個である．

$2p$(7個)：
46, 58, 62, 74, 82, 86, 94
$3p$(4個)：
51, 69, 87, 93
$4p$(2個)：
68, 92

さらに，n^2 の形をした数で使えない数に次の5個がある．

16, 25, 49, 64, 81

ただし，36は n^2 の形をしているが使える数である．そして，n^2 を2倍した数で使えない数に98の1個がある $(98=2\times7^2)$．

このようにして使えない数は，$17+13+5+1=36$ 個となる．素数や素数を因数に含む数がなぜ使えないかについての証明は省略する．読者は考えてみること．

3. 二項分解と三項分解

ここで単位分数に分解する方法を説明しておこう．

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

の場合は，$\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{6}$ は，

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$$

のように2つの単位分数に分解されるので，

$$1=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{42}\right)$$

となる．分解は二項分解と三項分解が基本であるので，それを説明しよう．

【二項分解】

単位分数の分母 n が $n=a\times b$ と分解できたとする．ただし，a,b は1を含んでもよいこととする．すると，つぎの2つの単位分数に分解できる．

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{a\times b}=\frac{a+b}{(a\times b)(a+b)}$$
$$=\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{a(a+b)}$$

たとえば，$3=1\times3$ であるので，

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{1\times3}=\frac{1+3}{(1\times3)(1+3)}$$
$$=\frac{1}{3(1+3)}+\frac{1}{(1+3)}=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}$$

となる．

【三項分解】

単位分数 $\frac{1}{n}$ がつぎのように3つの単位分数に分解されたとする．

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

たとえば，この式で成り立つ整数は，

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{26}+\frac{1}{39}+\frac{1}{52}$$

であるが，これを見つけるのはちょっと難しい．それにはつぎのように考えるとよい．

分母の n が最小公倍数となるような3つの数 a,b,c を見つけることがキーである．$\frac{1}{12}$ を例にして三項分解を求めて見よう．最小公倍数が12となるような3つの数に3，4，6がある．3つの数の合計は $3+4+6=13$ である．単位分数 $\frac{1}{12}$ の分子と分母に $3+4+6=13$ を掛ける．12は3，4，6の最小公倍数であるから，$\frac{3}{12}$，$\frac{4}{12}$，$\frac{6}{12}$ は分子，分母が約分できて分子が1となる．

$$\frac{1}{12}=\frac{3+4+6}{12\times(3+4+6)}$$
$$=\frac{3}{12\times13}+\frac{4}{12\times13}+\frac{6}{12\times13}$$
$$=\frac{1}{4\times13}+\frac{1}{3\times13}+\frac{1}{2\times13}$$
$$=\frac{1}{52}+\frac{1}{39}+\frac{1}{26}$$

これを一般式で書くとつぎのようになる．

$$\frac{1}{n}=\frac{a+b+c}{n(a+b+c)}$$
$$=\frac{a}{n(a+b+c)}+\frac{b}{n(a+b+c)}$$
$$+\frac{c}{n(a+b+c)}$$

ここで，a,b,c の最小公倍数が n であるから，n は a,b,c でそれぞれ割り切れる．つまり，$\frac{a}{n}$，$\frac{b}{n}$，$\frac{c}{n}$ は分子が1になる．これらの分母に $(a+b+c)$ を掛けたものは単位分数となる．

二項分解や三項分解の方法は，これ以外にも存在する．また，四項分解，五項分解も考えられるが，その多くは二項分解と三項分解の組み合わせで得られる．このような二項分解や三項分解は，いくつでも作ることができる．紙と鉛筆で求めてもよいが，本格的に調べようとするなら，表計算ソフトを使ってすべてをリストアップしたほうがよい．

4. 27通りの解の相互関連

ところで，項の数は最大いくつまで増やすことができるのだろうか．この答えは以前に計算

したことがあり，それは 62 である[2][3]．不等式は

$$\log n+\frac{1}{n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}<\log n+1$$

となる．

単位分数の分母が大きいほど項数を増やせるから，分母が 99 から始めて小さいほうに進むとして，つまり $\sum_{i=n}^{99}\frac{1}{i}$ を考えて，この値が 1 を越えない場合の最大の n を求めてみる．すると

$$\frac{1}{38}+\frac{1}{39}+\cdots+\frac{1}{98}+\frac{1}{99}<1$$

となり，$99-38+1=62$ より 62 が項数の上限となる．実際はこのように連続した値をとらないが，数値的に見れば最大 62 項ということになる．

表 1 は項の数を $n=42$ としたときの 27 通りの解の一覧表である．この表から次のことが読み取れる．52 個の使える数のうち，21 個は 27 通りのすべての解に含まれる数である．

17, 26, 32, 33, 34, 40, 44, 48, 50, 55, 56, 66, 75, 76, 77, 80, 84, 85, 88, 91, 96

また，12 と 14 は 1 つの解にだけ現れ，19 と 57 は 3 つの解にだけ現れる稀な数である．

27 通りの解は互いにどのようにつながっているのだろうか．たとえば，1 番目の解は

<u>12</u>, 17, 21, 22, 24, 26, 27, <u>30</u>, 32, 33, 34, 35, <u>36</u>, 38, <u>39</u>, 40, 42, 44, 48, 50, 52, 54, 55, 56, 60, 63, 66, 70, 72, 75, 76, 77, 78, 80, 84, 85, 88, 90, 91, 95, 96, 99

であり，2 番目の解は

<u>13</u>, 17, <u>18</u>, 21, 22, 24, 26, 27, 32, 33, 34, 35, 38, 40, 42, 44, <u>45</u>, 48, 50, 52, 54, 55, 56, 60, 63, <u>65</u>, 66, 70, 72, 75, 76, 77, 78, 80, 84, 85, 88, 90, 91, 95, 96, 99

である．これらで違う数を下線で示すと，

12, 30, 36, 39 と 13, 18, 45, 65

になる．そして，これら異なる 4 個の数は

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{36}+\frac{1}{39}$$
$$=\frac{1}{13}+\frac{1}{18}+\frac{1}{45}+\frac{1}{65}=\frac{199}{1170}$$

の関係式がなりたつ．27 通りの解は，互いに 2 個から 5 個の数を入れ替えることで全体がつながっている．

参考文献

[1] 西山豊「エレガントな解答をもとむ」『数学セミナー』1992 年 8 月(出題)，11 月(解答)

[2] 西山豊「単位分数の和が 1」『理系への数学』2010 年 11 月，17-12．

[3] Yutaka Nishiyama, Having Fun With Unit Fractions, Plus Magazine, Feb 2012．

No	12	13	14	15	17	18	19	20	21	22	24	26	27	28	30	32	33	34	35	36	38	39	40	42	44	45
1	○				○				○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	
2		○			○	○			○	○	○	○	○			○	○	○	○		○		○	○	○	○
3		○			○	○				○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○		○	○	○	○
4		○			○			○	○	○	○	○	○			○	○	○	○	○	○		○	○	○	
5		○			○			○	○	○	○	○			○	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○
6		○			○			○	○	○		○	○		○	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○
7		○			○			○	○		○	○	○		○	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○
8		○			○			○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○		○		○	○	○	○
9			○		○				○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○		○	
10				○	○	○			○	○	○	○	○			○	○	○	○		○	○	○	○	○	○
11				○	○	○				○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
12				○	○			○	○	○	○	○	○			○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	
13				○	○			○	○	○	○	○			○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
14				○	○			○	○	○		○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
15				○	○			○	○		○	○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
16				○	○			○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○
17					○	○	○		○	○	○	○	○		○	○	○	○	○			○	○	○	○	○
18					○	○	○			○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○
19					○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○			○	○	○		○	○
20					○	○		○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○
21					○	○		○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○
22					○	○		○	○	○	○	○	○		○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○
23					○	○		○	○	○	○	○	○			○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
24					○	○		○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
25					○	○		○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
26					○	○			○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
27					○		○	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	
	1	7	1	7	27	14	3	18	20	25	25	27	25	10	20	27	27	27	25	19	24	20	27	25	27	22

No	48	50	52	54	55	56	57	60	63	65	66	70	72	75	76	77	78	80	84	85	88	90	91	95	96	99	
1	○	○	○	○	○	○		○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
2	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
3	○	○	○	○	○	○		○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
4	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
5	○	○	○		○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
6	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
7	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○		42
8	○	○	○	○	○	○		○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
9	○	○	○	○	○	○		○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
10	○	○	○	○	○	○		○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
11	○	○	○	○	○	○		○			○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
12	○	○	○	○	○	○		○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
13	○	○	○		○	○		○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
14	○	○	○	○	○	○		○	○		○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
15	○	○	○	○	○	○		○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○		42
16	○	○	○	○	○	○		○			○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
17	○	○	○	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○		○	○	42
18	○	○	○	○	○	○	○	○			○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○		○	○	42
19	○	○	○	○	○	○		○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
20	○	○	○	○	○	○			○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
21	○	○		○	○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
22	○	○	○	○	○	○		○			○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
23	○	○	○	○	○	○		○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	42
24	○	○	○	○	○	○					○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
25	○	○		○	○	○		○		○	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
26	○	○	○	○	○	○		○			○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	42
27	○	○	○	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○		○	○	42
	27	27	25	25	27	27	3	25	18	9	27	26	25	27	27	27	25	27	27	27	27	26	27	24	27	25	

表 1．n=42 に対する 27 通りの解

(にしやま ゆたか／大阪経済大学)

● 数学漫談 ●

分数の除法について

分数の除法は割る数(除数)の分母・分子を交換して割られる数に掛ければよい．

これは昔から普遍的に教えられてよく知られている規則ですが，なぜそれでよいのかはよくある質問です．

それには多くの説明があり，また歴史的な事情もあるようです．いまさら本誌上で論ずる価値はないかもしれませんが，いくつか面白い着想を聞いたので紹介します．

小学生には具体的な数で説明すべきですが，ここでは一般的な文字式で表現します．

① 最も簡単なのは次の説明でしょう：除法とは逆数を掛けることである．分数の逆数は分母と分子を交換した分数である．だから上記の算法は当然だ．□

その通りだが，これでは十分に納得しない人が多いので，別の説明を考えます．

② **除法** $a\div b=c$ とは $b\times c=a$ となる c を求めることである．したがって $a\div(b\times c)=d$ は $b\times c\times d=a$ を満たす d を求めることである．これは $c\times d=a\div b$，さらに $(a\div b)\div c=d$ を表す．つまり $a\div(b\times c)=(a\div b)\div c$ である．さて分数 $\frac{m}{n}$ は $m\times\frac{1}{n}$ とみなすことができるから，分数による除法は

$$\frac{a}{b}\div\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\div\left(m\times\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{a}{b}\div m\right)\div\frac{1}{n} \tag{1}$$

と 2 段階に分けられる．最初の $\frac{a}{b}\div m$ は $\frac{a}{b}$ をさらに m 等分することで $\frac{a}{b\times m}$ と表される．次の $\div\frac{1}{n}$ は，$\frac{1}{n}$ を新しい単位と考えて測り直す操作と考えられる．それは結果的に割られる数の n 倍になる．したがって(1)の結果は

$$\frac{a}{b\times m}\times n=\frac{a}{b}\times\frac{1}{m}\times n=\frac{a}{b}\times\frac{n}{m} \tag{2}$$

と表され，冒頭の規則通りである．□

③ 分数の割り算は分子どおし，分母どおしの除法として計算できる．それを実行するために，中間の分数を適宜「倍分」してよいので

$$\frac{a}{b}\div\frac{m}{n}=\frac{a\div m}{b\div n}=\frac{a\times(mn)\div m}{b\times(mn)\div n}=\frac{a\times n}{b\times m}=\frac{a}{b}\times\frac{n}{m} \tag{3}$$

となる．結果は(2)と同じである(倍分は約分の逆操作)．□

④ (1)の答えは $\frac{m}{n}\times u=\frac{a}{b}$ を満たす分数 u である．両辺に $b\times n$ を掛けると

$$a\times n=b\times m\times u \implies u=\frac{a\times n}{b\times m} \quad (\text{除法の定義})$$

となる．結果は上述の(3)＝(2)と一致する．□

他にも同工異曲の説明がいろいろ可能です．ただこのような説明を完全なものにするためには，分数 $\frac{a}{b}$ とは，単に a を b 等分した一片というだけでなく，b を単位として測った a の当量というような多様の性格があることを，十分に理解しておく必要があります．

(クスコ)