数学を楽しむ
プロイズヴォロフの恒等式

西山　豊

1. 差の合計が 25 になる

イギリスの知己スティーブ・ハンブルから，面白いカード・トリックがあるが知っているかとメールが届く．トランプを使った不思議な数学現象で初めて見るものだ．トランプは全部で 52 枚あるが，同柄のもので 1 から 10 の 10 枚だけを使う．たとえばスペードのエースから 10 までのカードでよい．

10 枚のカードをよくシャッフルして，机の上に 5 枚ずつ 2 段に配る．図 1 のように数字はランダムに並んでいる．上段は左から 9，8，4，10，3 で下段は 2，5，6，1，7 である．

つぎに，上段の 5 枚を小さい順（昇順）に，下段の 5 枚を大きい順（降順）に並べ替える（図 2）．上段は 3，4，8，9，10 で下段は 7，6，5，2，1 となる．

上段と下段で対応しているカードで，大きい方から小さい方を引き，その差を合計すると 25 になると言うのだ．図 2 では左から順に 3 と 7，4 と 6，8 と 5，9 と 2，10 と 1 であるから，差をとると，

$$7-3=4$$
$$6-4=2$$
$$8-5=3$$
$$9-2=7$$
$$10-1=9$$

となり，差の合計は

$$4+2+3+7+9=25$$

となる．

この不思議な現象に興味を持たれた読者はいちど試してみてください．

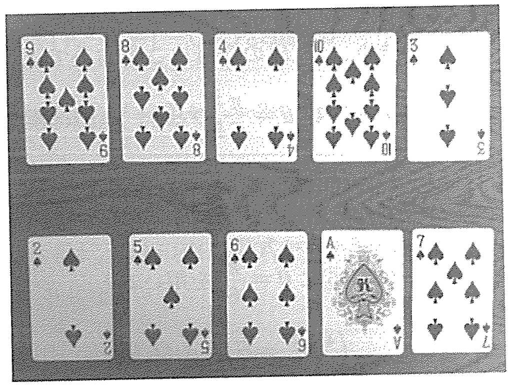

図 1　ランダムに配る

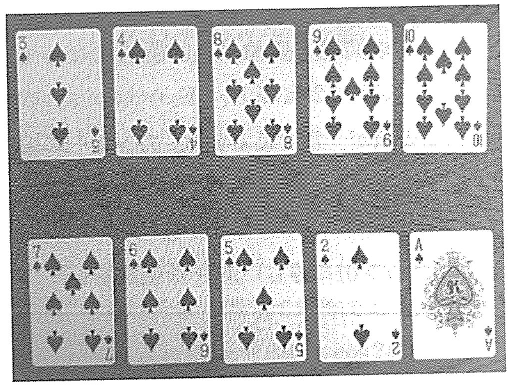

図 2　並び替える（上：昇順，下：降順）

2. ジェームス・グライムの考案

このカード・トリックは，ジェームス・グライム（James Grime）が考案したものである [1]．彼は，Numberphile というユーチューブ動画サイトに多くの数学の話題を投稿している．接尾辞の phile はファイルと発音し「愛好家」の意味があるので，Numberphile は数愛好家のサイトといえよう．

この動画の中で，Proizvolov Identity の数学原理をトランプに応用したとあったので調べてみた．ネットで，この単語を検索したが日本語ではヒットせず，わずかに Wikipedia の英語版に見つかった [2]．

Proizvolov はロシアの人名で，プロイズヴォロフと発音する．Identity は数学用語では「恒等式」のことである．Proizvolov Identity は，「プロイズヴォロフの恒等式」という意味である．

3. プロイズヴォロフの恒等式

1 から $2N$ までの自然数の，$2N$ 個の集合がある．

$$\{1,2,3,\cdots,2N-1,2N\}$$

これを N 個の集合 A，B に分け，一方を小さい順に並べ替え，

$$A_1<A_2<\cdots<A_N$$

もう一方を大きい順に並べ替え，

$$B_1>B_2>\cdots>B_N$$

対応する数の差の絶対値の合計をとると，つねに N^2 になる．

$$|A_1-B_1|+|A_2-B_2|+\cdots+|A_N-B_N|=N^2$$

これがプロイズヴォロフの恒等式である．1985 年，旧ソ連の数学オリンピックで出題され，それからこの恒等式が有名になったと言われている [3]．

例えば，$N=3$ とすると，集合は

$$\{1,2,3,4,5,6\}$$

である．

$$A_1=2,\ A_2=3,\ A_3=5,$$
$$B_1=6,\ B_2=4,\ B_3=1$$

とすると，

$$\begin{aligned}&|A_1-B_1|+|A_2-B_2|+|A_3-B_3|\\&=|2-6|+|3-4|+|5-1|\\&=4+1+4=9=3^2\end{aligned}$$

となる．

冒頭の例では，数式で言うと次のようになる．$N=5$ で集合は，

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

これを 2 つのグループにわけると

$$A=\{3,4,8,9,10\}$$
$$B=\{7,6,5,2,1\}$$

差の合計をとると

$$\begin{aligned}&|A_1-B_1|+|A_2-B_2|\\&\quad+|A_3-B_3|+|A_4-B_4|+|A_5-B_5|\\&=|3-7|+|4-6|+|8-5|+|9-2|+|10-1|\\&=4+2+3+7+9=25=5^2\end{aligned}$$

になる．

以上をまとめると，カードが $2N$ 枚のとき，差の合計が N^2 になるというので，4 枚なら 4，6 枚なら 9，10 枚なら 25，12 枚なら 36，…となる．

4. 簡単な証明

$N=5$ の場合で証明を考えてみよう．

$2N=10$ 個の集合で $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ であるが，これを 2 つのグループ Small と Big にわける．

$$Small=\{1,2,3,4,5\}$$
$$Big=\{6,7,8,9,10\}$$

Small を小さな数のグループ，Big を大きな数のグループとしたとき，引き算は必ず大きな数のグループ Big から，小さな数のグループ Small の引き算になること，大きい数のグループ同士，小さい数のグループ同士の引き算にならないことを示しておこう．

10 枚のカードで，数字が 5（$=N$）のカードに着目しよう．

5 のカードは 2 行 5 列のどこかにあるが，とりあえず上段で左から 4 番目であったとしよう（図 3）．

上段は小さい順（昇順）に並んでいるので，5 のカードの右側すべてが 5 より大きい，6 以上であることになる（図 4）．この場合は 6 以上の数が 1 個である．大きい数のグループ Big は 5 個あるから，5－1＝4 個が下段のどこかにあるはずだ．

下段は大きい順（降順）に並んでいるので，左

端から4番目の位置までが大きい数のグループBigで占められる（図5）．このとき，5のカードに対応する下段のカードは大きい数のグループBigの数となっている．

図5において大きい数のグループBigの5枚はすべてオープンになったので，裏側になっているカードはすべて小さい数のグループSmallのカードである（図6）．

5のカードを上段のどれかに仮定して証明したが，下段のどれかに仮定しても，同様の手順で証明できるので省略する．

【別解】

別の証明法として，背理法を使った証明がある．5のカードに対応する下段のカードが5以下であったとする．5以下の数は，上段は4個（昇順なので5を含む左側の4個），下段は2個（降順なので右側の2個）になり，4+2＝6で6個あることになり，矛盾である．よって5のカードに対応するのは6以上のカードである．

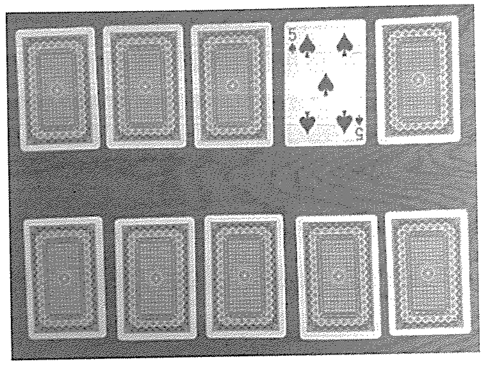

図3　5の位置

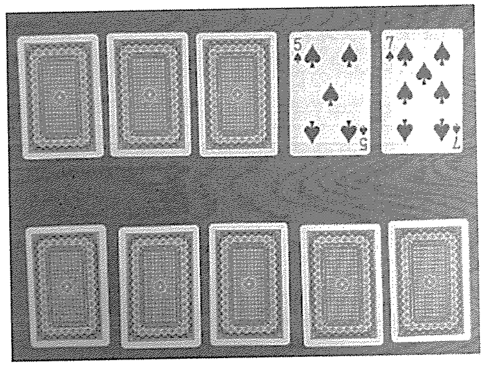

図4　右側は6以上

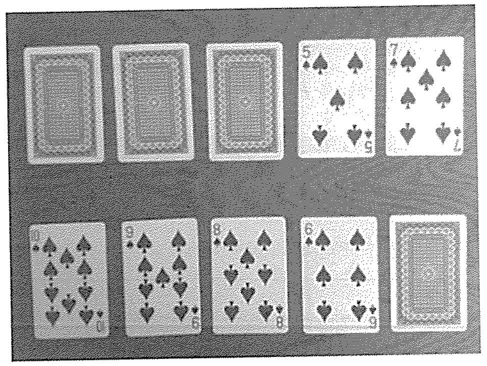

図5　下段左から4枚は6以上，それ以外は4以下

このようにして上段と下段の組み合わせは，大きい数のグループBigと小さい数のグループSmallの組み合わせとなり，Big同士，Small同士にはならないことが示せたことになる（図7）．

差の合計が25になることを説明しよう．

$$Small=\{1,2,3,4,5\}$$

$$Big=\{6,7,8,9,10\}$$

であるので，大きい数のグループBigのどの数も，小さい数のグループSmallのどの数よりも大きい．

$$\begin{aligned}Big-Small&=\{6,7,8,9,10\}-\{1,2,3,4,5\}\\&=(6+7+8+9+10)\\&\quad-(1+2+3+4+5)\\&=(6-1)+(7-2)+(8-3)\\&\quad+(9-4)+(10-5)\\&=5+5+5+5+5=5\times5=5^2\end{aligned}$$

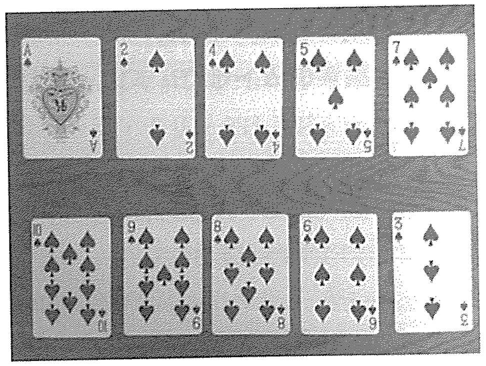

図6　6以上と5以下の組み合わせ（それ以外はない）

≦5	≦5	≦5	≦5	>5
>5	>5	>5	>5	≦5

図7　Small と Big の組み合わせ

この証明は一般の N についても成立する．

1から $2N$ までの集合，

$$\{1,2,\cdots,2N\}$$

を2つのグループにわけると

$$Small=\{1,2,\cdots,N\}$$

$$Big=\{N+1,N+2,\cdots,2N\}$$

Bigのグループの数からSmallのグループの数を引くのであるから，

$$\begin{aligned}Big-Small&=\{N+1,N+2,\cdots,2N\}\\&\qquad-\{1,2,\cdots,N\}\\&=(N+1-1)+(N+2-2)+\cdots+(2N-N)\\&=N+N+\cdots+N\\&=N\times N=N^2\end{aligned}$$

参考文献

[1] James Grime, James ♥ A Card Trick – Numberphile, 25 June 2019.
https://www.youtube.com/watch?v=_Wv_qw3nQnI

[2] Proizvolov's identity，英語版 Wikipedia

[3] Savchev Svetoslav; Andreescu Titu, Mathematical miniatures, Mathematical Association of America, 79-82, 2002.

（URL の最終閲覧は2020年10月1日）

（にしやま・ゆたか／大阪経済大学名誉教授）