西山　豊

数学を楽しむ

3つの角の和が直角

1. 加法定理を忘れたら解けないか

図1のような角度の証明問題がある．正方形が3つ横に並んでいて，左上端から底辺に3本の線を引くと3つの角ができる．この3つの角を合計すると直角になるというのだ．

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$$

あまりにも美しい形をした数式なので，読者は解いた経験があることだろう．私はインターネットのSNSに，この問題を投稿したところ多くの反響があったが，証明のほとんどは三角関数の加法定理を用いたものであり，その加法定理を忘れた人は，お手上げという返事だった．

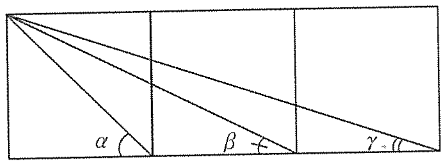


図1　$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$

3つの角の合計が直角であるが，α は45度で自明なので，$\beta+\gamma$ が45度であることを示せばよい．

$$\tan\alpha=1,\ \tan\beta=\frac{1}{2},\ \tan\gamma=\frac{1}{3}$$

$$\tan\alpha=1 \text{ より } \alpha=\frac{\pi}{4}$$

三角関数の加法定理より

$$\tan(\beta+\gamma)=\frac{\tan\beta+\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{3+2}{6-1}=1$$

$$\therefore\ \beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$$

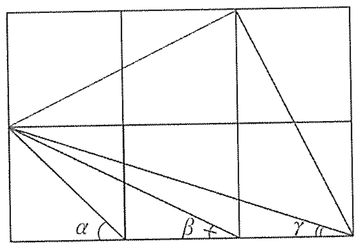
$$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$$

2. 図形による証明

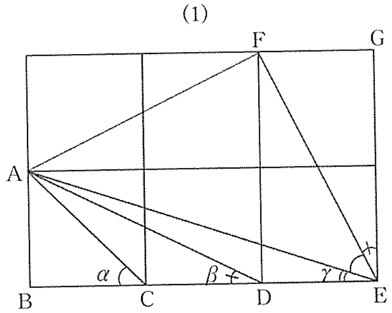
証明は三角関数の加法定理でできるが，加法定理を知らない中学生はどうするのだろうか．ネットで調べてみたところ，つぎのような図形による証明があった．広く知られている方法である．

●証明－1

図1の上に，同じ大きさの正方形を3つ重ねて6つの正方形とする（図2(1)）．補助線を2本引くことで証明ができる．読者は，チャレンジしてください．



(1)



(2)

図2　上に正方形を3つ

証明のために，点Aから点Gまでを図に記入する（図2(2)）．右下端の点Eに2つの角 α,β が移動することを説明しよう．

三角形FEGと三角形ADBは合同であるから，角 β が移動する．

$$\triangle \mathrm{FEG}\equiv\triangle \mathrm{ADB}$$

$$\therefore\ \angle \mathrm{FEG}=\angle \mathrm{ADB}=\beta$$

三角形FAEと三角形BCAは二等辺三角形であるから，角 α が移動する．

△FAEにおいて

$$\mathrm{FA}=\mathrm{FE}$$

$$\therefore\ \angle \mathrm{FEA}=\angle \mathrm{BCA}=\frac{\pi}{4}=\alpha$$

最初からあった角 γ に，角 α と角 β を足せば直角になる．

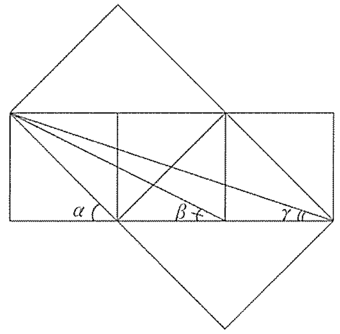
$$\angle \mathrm{BEA}+\angle \mathrm{FEA}+\angle \mathrm{FEG}=\angle \mathrm{BEG}$$

$$\gamma+\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$$

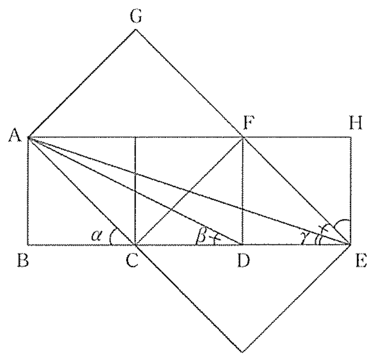
$$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$$

●証明－2

図1に辺が $\sqrt{2}$ 倍の正方形を2つ，斜めに追加する（図3(1)）．この図からでも証明できる．



(1)



(2)

図3　斜めに正方形を2つ

証明のために，点Aから点Hまでを図に記入する（図3(2)）．点Eに2つの角 α,β が移動することを説明する．

三角形AEGと三角形ADBは相似であるから，角 β が移動する．

$$\triangle \mathrm{AEG}\sim\triangle \mathrm{ADB}$$

$$\therefore\ \angle \mathrm{AEG}=\angle \mathrm{ADB}=\beta$$

三角形FEHと三角形ACBは合同であるから，角 α が移動する．

$$\triangle \mathrm{FEH}\equiv\triangle \mathrm{ACB}$$

$$\therefore\ \angle \mathrm{FEH}=\angle \mathrm{ACB}=\alpha$$

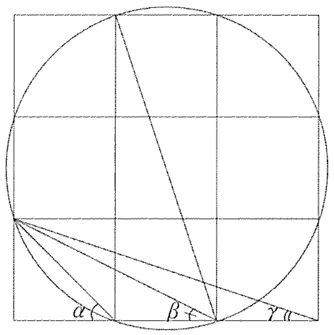
角 γ に角 α と角 β を足せば直角になる．

$$\angle \mathrm{FEH}+\angle \mathrm{AEG}+\angle \mathrm{AEB}=\angle \mathrm{HEB}$$

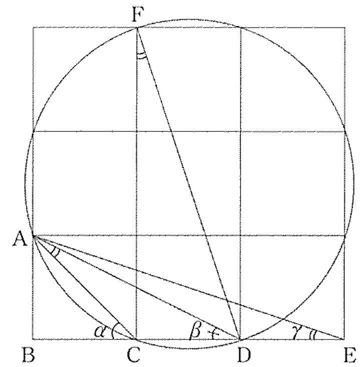
$$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$$

●証明－3

図1の上方に，正方形を3つずつ重ねて9個の正方形にする．そして円を描き，補助線を1本引くと証明できる（図4(1)）．



(1)



(2)

図4　円周角の定理

証明のために，点Aから点Fまでを図に記入する（図4(2)）．点A, C, D, Fを通る円を描くと，角γが角CADに移動することを説明する．

三角形DFCと三角形AEBは合同であるから，角γは角DFCに移る．

$$\triangle \mathrm{DFC} \equiv \triangle \mathrm{AEB}$$

$$\therefore\ \angle \mathrm{DFC}=\angle \mathrm{AEB}=\gamma$$

円周角の定理より，円弧CDに対する円周角は等しく，角γは角CADに移る．

$$\angle \mathrm{CAD}=\angle \mathrm{DFC}=\gamma$$

三角形の外角定理（2つの内角の和は隣り合わない1つの外角と等しい）より，

$$\angle \mathrm{CAD}+\angle \mathrm{CDA}=\angle \mathrm{ACB}=\frac{\pi}{4}$$

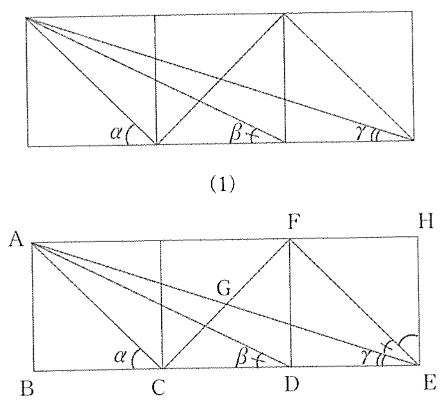
$$\therefore\quad \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$$

3. 補助線が少ないほどエレガント

以上は中学生にわかる図形による証明であるが，補助線は少なければ少ないほどエレガントな証明とみなされている．ここでは，その観点から検討してみよう．

●証明 - 4

図1に補助線を2本引くだけで証明することができる（図5(1)）．



(1)

(2)

図5　補助線が2本

証明のために，点Aから点Hまでを図に記入する（図5(2)）．補助線CFと線分AEの交点をGとする．

三角形GEFと三角形ADBは相似であるので，角βは角GEFに移動する．

$$\triangle \mathrm{GEF} \sim \triangle \mathrm{ADB}$$

$$\therefore\ \angle \mathrm{GEF}=\angle \mathrm{ADB}=\beta$$

三角形FEHと三角形ACBは合同であるので，角αは角FEHに移動する．

$$\triangle \mathrm{FEH} \equiv \triangle \mathrm{ACB}$$

$$\therefore\ \angle \mathrm{FEH}=\angle \mathrm{ACB}=\alpha$$

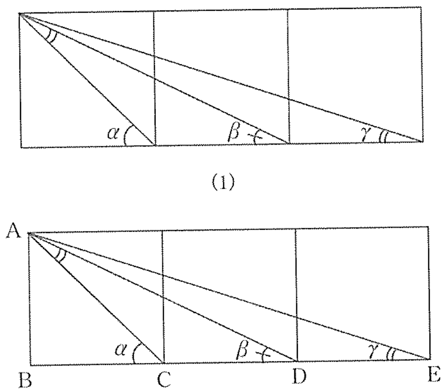
よって

$$\angle \mathrm{FEH}+\angle \mathrm{GEF}+\angle \mathrm{AEB}=\angle \mathrm{HEB}$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$$

●証明 - 5

図1に補助線を引かなくても証明できる（図6(1)）．ただし，これができるのは図形問題に慣れている人だ．



(1)

(2)

図6　補助線はいらない

証明のために，点Aから点Eまでを図に記入する（図6(2)）．角γが角CADに移動することを示す．

三角形ACDと三角形ECAは相似である．正方形の1辺の長さを1とすると，辺CDの長さは1，辺ACの長さは$\sqrt{2}$，辺CEの長さは2である．辺ACと辺CDの長さの比は，辺ECと辺CAの長さの比に等しく$\sqrt{2}$対1である．

$$\angle \mathrm{CAD}=\gamma$$

$$\because\ \triangle \mathrm{ACD} \sim \triangle \mathrm{ECA}$$

$$\mathrm{CD}=1,\ \mathrm{AC}=\sqrt{2},\ \mathrm{CE}=2$$

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CD}}=\frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CA}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CD}}=\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CA}}$$

対応する2辺の長さの比が等しく，交角が同じであるので，三角形ACDと三角形ECAは相似である．

$$\angle \mathrm{ACD}=\angle \mathrm{ECA}$$

$$\therefore\ \triangle \mathrm{ACD} \sim \triangle \mathrm{ECA}$$

よって，角γは角CADに移動したことになる．

$$\angle \mathrm{CAD}=\angle \mathrm{CEA}=\gamma$$

三角形の外角定理より，角CADと角CDAの和は外角ACBに等しい．

$$\angle \mathrm{CAD}+\angle \mathrm{CDA}=\angle \mathrm{ACB}$$

$$\gamma+\beta=\alpha=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$$

4. 直線の方程式

中学数学からは図形に座標系が導入される．直線の方程式を用いた証明を示そう．

角αは45度で自明であるので，角βと角γの和を考えてみよう．

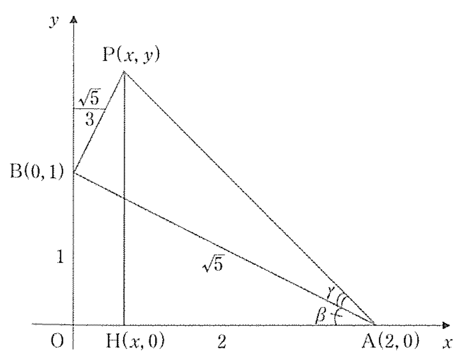


図7　座標系

角βは，底辺が2で高さが1の直角三角形でできる角であるので，直角三角形OABを原点O(0, 0)と，点A(2, 0)と点B(0,1)で表す．ABの長さはピタゴラスの定理より$\sqrt{5}$である．

角γは，底辺が3で高さが1の直角三角形でできる角であるので，BAを底辺とする直角三角形BAPを点B(0, 1)と点A(2, 0)と，新しい点P(x, y)で表す．BPの長さは$\frac{\sqrt{5}}{3}$である．点Pからx軸に下した垂線の足を点H$(x, 0)$とする．

ここで，AB, BPの直線の方程式は，それぞれ

$$y=-\frac{1}{2}x+1 \qquad (1)$$

$$y=2x+1 \qquad (2)$$

となる．BPの長さ（の自乗）は距離の公式より

$$x^2+(y-1)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

これを解いて

$$x^2+4x^2=\frac{5}{9}$$

$$x=\frac{1}{3},\ y=\frac{5}{3}$$

となり，これがPの座標である．また，

$$\overline{\mathrm{AH}}=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

$$\overline{\mathrm{PH}}=\frac{5}{3}$$

よりAHの長さがPHの長さと等しくなる．よって，

$$\angle \mathrm{PAH}=\frac{\pi}{4}=\beta+\gamma$$

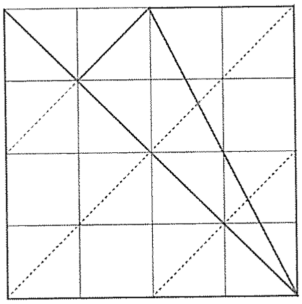
$$\therefore\quad \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$$

5. 方眼紙を使う

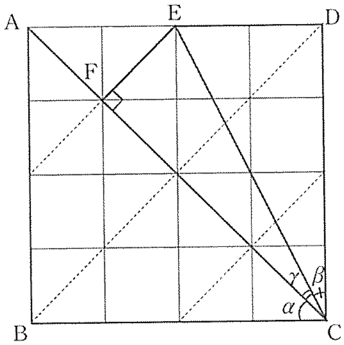
小学校では方眼紙を使うことがある．これを使えば，直線の方程式を知らなくても証明できる．

縦4コマ，横4コマの方眼紙に，図8(1)の

ような直角三角形を3つ描く．方眼紙に斜めの点線はないので加筆しておく．



(1)



(2)

図8　方眼紙を使った証明

説明のために点Aから点Fまでと，3つの角 α, β, γ を記入した（図8 (2)）．

三角形ABCでBCとABの長さは4で等しいので，角BCAは角 α と同じ．

三角形ECDでCDの長さは4，DEの長さは2で比率が2対1なので，角ECDは角 β と同じ．

三角形EFCでCFの長さは対角線を3倍したもので，FEの長さは対角線なので，比率は3対1になり，角ECFは角 γ と同じ．以上より，

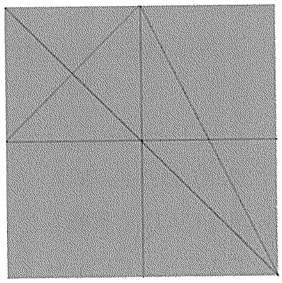
$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$$

が示せたことになる．

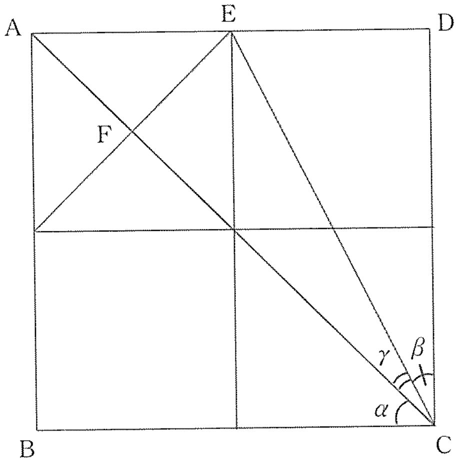
6. 折り紙を使う

方眼紙で証明できることがわかると，折り紙でも証明できることに気づく．図9 (1) のように，折り紙を5回折って折り目をつける．これで十分だ．

説明のために点Aから点Fまでと，角 α, β, γ を記入しておく（図9 (2)）．折り紙の縦と横の長さは等しいので角ACBは角 α と同じ．EDは折り紙を半分に折った長さであるので，DCとEDの長さの比は2対1，角ECDは角 β と同じ．同様にFCとFEの長さの比は3対1であるので，角ECFは角 γ と同じ．



(1)



(2)

図9．折り紙を使った証明

以上，図形の証明問題を三角関数の加法定理から始めて，折り紙による証明まで辿りついた．「牛刀をもって鶏を割く」という論語のことばがあるが，高度な数学知識を用いなくても証明できる．数学教育を見直す機会になればと思う．

（にしやま　ゆたか／大阪経済大学名誉教授）