

数学を楽しむ トレミーの定理の応用

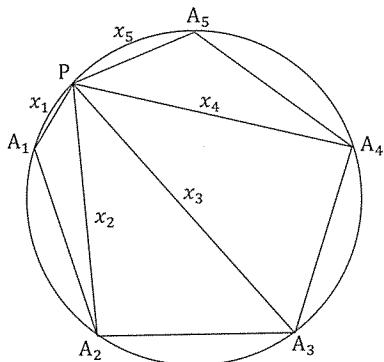
つきの問題は『数学セミナー』のエレガントな解答をもともとに出題したものである[1]。解いてみて楽しくなる問題であり、予期せぬ解答が多く寄せられたので、ここにその解法を詳しく説明したい。

【問題】

正五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ の外接円の任意の点 P から各頂点に線を引き、その長さを x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 とするとき、

$$x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4$$

を証明せよ。



$$\text{図 } 1 \quad x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4$$

1. トレミーの定理

一番多かった解答は、トレミーの定理を用いるもので、中学校の数学の知識で解けるように思う。解法は5通りあったが、代表的な解法なのでこれを記事のタイトルとした。

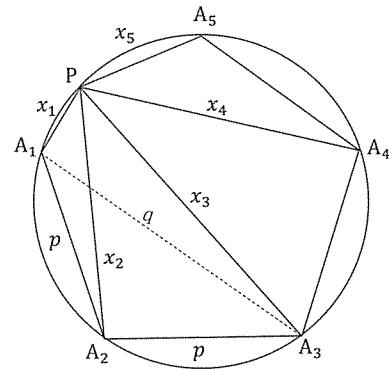


図2 トレミーの定理

一辺の長さを p 、対角線の長さ(点線)を q とする。四角形 $PA_1A_2A_3$ においてトレミーの定理より、

$$\begin{aligned} x_1p + x_3p &= x_2q \\ x_1 + x_3 &= x_2 \times \frac{q}{p} \end{aligned} \quad (1)$$

四角形 $PA_3A_4A_5$ より

$$\begin{aligned} x_5p + x_3p &= x_4q \\ x_5 + x_3 &= x_4 \times \frac{q}{p} \end{aligned} \quad (2)$$

四角形 $PA_2A_3A_4$ より

$$\begin{aligned} x_2p + x_4p &= x_3q \\ x_2 + x_4 &= x_3 \times \frac{q}{p} \end{aligned} \quad (3)$$

(1) と (2) より

$$x_1 + 2x_3 + x_5 = (x_2 + x_4) \times \frac{q}{p} \quad (4)$$

(3) より

$$x_3 = \frac{x_2 + x_4}{q/p} \quad (5)$$

(4) と (5) より

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 + x_5 &= (x_2 + x_4) \times \left(\frac{q}{p} - \frac{1}{q/p} \right) \\&= (x_2 + x_4) \times \left(\varphi - \frac{1}{\varphi} \right)\end{aligned}$$

ここに

$$\varphi = \frac{q}{p} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (\varphi \text{ は黄金比})$$

$$\varphi - \frac{1}{\varphi} = 1$$

よって

$$x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4$$

【別解】

トレミーの定理を用いる四角形を工夫すれば、式はもっと簡単になる。四角形 $PA_3A_4A_5$ より、

$$x_5p + x_3p = x_4q$$

四角形 $PA_1A_3A_4$ より

$$x_1p + x_4q = x_3q$$

上の 2 式より

$$(x_1 + x_3 + x_5)p = x_3q \quad (*)$$

四角形 $PA_2A_3A_4$ より

$$x_2p + x_4p = x_3q \quad (**)$$

(*) と (**) より

$$(x_1 + x_3 + x_5)p = (x_2 + x_4)p$$

$$x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4$$

2. 余弦定理

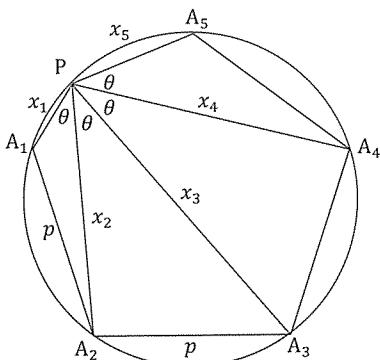


図 3. 余弦定理

高校数学で学ぶ余弦定理を使った証明は次のようになる。

一辺の長さを p , 円周角を θ とする。

三角形 PA_1A_2 , 三角形 PA_2A_3 , 三角形 PA_3A_4 , 三角形 PA_4A_5 , 三角形 PA_5A_1 の余弦定理より、

$$p^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos \theta \quad (1)$$

$$p^2 = x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 \cos \theta \quad (2)$$

$$p^2 = x_3^2 + x_4^2 - 2x_3x_4 \cos \theta \quad (3)$$

$$p^2 = x_4^2 + x_5^2 - 2x_4x_5 \cos \theta \quad (4)$$

$$p^2 = x_5^2 + x_1^2 - 2x_5x_1 \cos 4\theta \quad (5)$$

ここで、式 (5) はつぎのように変形できる。

円周角 θ は正五角形より、

$$\theta = \frac{\pi}{5}$$

$$4\theta = \pi - \theta$$

$$\cos 4\theta = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

より

$$p^2 = x_1^2 + x_5^2 + 2x_1x_5 \cos \theta \quad (5')$$

隣接する 2 つの三角形の余弦定理の式から p を消去するとつぎの 5 式が得られる。

(1) と (2) より

$$x_1 + x_3 = 2x_2 \cos \theta \quad (6)$$

(2) と (3) より

$$x_2 + x_4 = 2x_3 \cos \theta \quad (7)$$

(3) と (4) より

$$x_3 + x_5 = 2x_4 \cos \theta \quad (8)$$

(4) と (5) より

$$x_4 - x_1 = 2x_5 \cos \theta \quad (9)$$

(5) と (1) より

$$x_5 - x_2 = -2x_1 \cos \theta \quad (10)$$

x_1, x_3, x_5 を含む項を左に、 x_2, x_4 を含む項を右に分け、合計すると、

$$\begin{aligned}(2 + 2 \cos \theta)(x_1 + x_3 + x_5) \\= (2 + 2 \cos \theta)(x_2 + x_4)\end{aligned}$$

より

$$x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4$$

【別解】

余弦定理を使わなくとも、(6) ~ (10) の式が得られることを示そう。

一辺の長さを p , 円周角を θ とする。三角形 PA_1A_2 を A_2 を中心に回転させ、 A_1 が A_3 に重な

るようとする。

P の移動先を P' とすれば、 P, A_3, P' は一直線に並び、三角形 PA_3P' は二等辺三角形になる(図 4)。

$$PP' = 2 \times PA_2 \cos \theta$$

より

$$x_1 + x_3 = 2x_2 \cos \theta$$

同様に、三角形 PA_2A_3 を A_3 を中心に、三角形 PA_3A_4 を A_4 を中心に、三角形 PA_4A_5 を A_5 を中心に、三角形 PA_1A_5 を A_1 を中心に回転させることで、(7) ~ (10) が得られる。これなら中学数学で解ける。要は幾何のセンスだ。

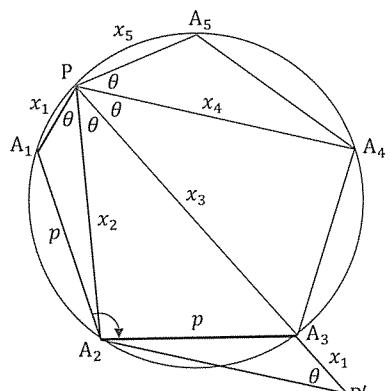


図 4. $x_1 + x_3 = 2x_2 \cos \theta$

3. 二等辺三角形

つぎに紹介するのは岩田至康の『幾何学大辞典』に掲載されていたもので x_1, x_3, x_5 と x_2, x_4 を移動して二等辺三角形にするもので、幾何のセンスがいる[2]。

一辺 A_1A_2 上の円周角を α とすると、 $5\alpha = \pi$ である。 PA_1 を延長して $A_1B=PA_5$ となるように B をとる。円周角が等しいことから $\angle PA_5A_3 = \angle PA_4A_3$ 、円に内接する四角形 $PA_1A_3A_4$ より $\angle PA_4A_3 = \angle BA_1A_3$ 、三角形 PA_5A_3 と三角形 BA_1A_3 は、2 辺と挟角が等しいから ($PA_5=BA_1, A_5A_3=A_1A_3, \angle PA_5A_3=\angle BA_1A_3$) 合同である。

$A_3P=A_3B$ より、三角形 BA_3P は二等辺三角形になる。

三角形 BA_3P の内角の和は π であり、 $5\alpha = \pi$

であるので $\angle BA_3P = \alpha$ となる。

同様にして、 PA_2 を延長して $A_2C=PA_4$ となるように C をとる。円に内接する四角形 $PA_2A_3A_4$ より $\angle PA_4A_3 = \angle CA_2A_3$ であり、 $PA_4=CA_2, A_3A_4=A_3A_2$ より、三角形 PA_3A_4 と三角形 CA_3A_2 は合同である。

$\angle A_2CA_3 = \angle A_4PA_3 = \alpha$ となる。三角形 A_3PC は二等辺三角形である。

つぎに PA_3 を延長して $A_3D=PB$ となるように D をとる。 $\angle CA_3D = \angle A_3PC + \angle A_3CP = 2\alpha$

$A_3C=BA_3, A_3D=BP, \angle CA_3D = \angle A_3BP$ より、三角形 A_3CD と三角形 BA_3P は合同である。 $\angle A_3CD = \angle BA_3P = \alpha$ となる。

$$\angle PCD = \angle PCA_3 + \angle A_3CD = 2\alpha,$$

$$\angle PCD = \angle PDC$$

より、三角形 DPC は二等辺三角形になる。 $PC=PD$ となる。

$$PC=PA_2+A_2C=PA_2+PA_4$$

および

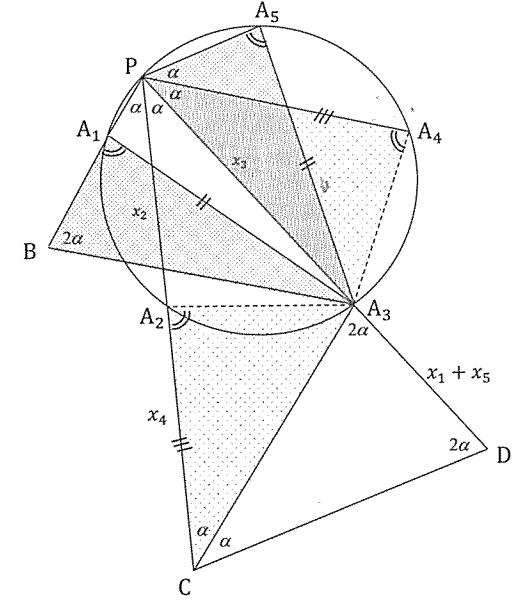
$$PD=PA_3+A_3D$$

$$=PA_3+PB=PA_3+PA_1+PA_5$$

より

$$PA_1+PA_3+PA_5=PA_2+PA_4$$

$$x_1+x_3+x_5=x_2+x_4$$



4. 極座標

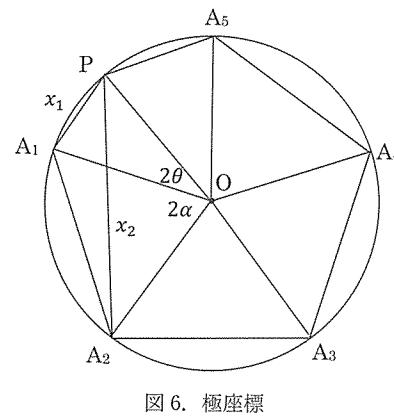


図 6. 極座標

つぎに紹介するのは極座標を使い、複素数や等比級数が出てくるので高校数学の知識が必要である。意外とシンプルに証明できる。
外接円を原点 O の単位円とし、正五角形の頂点を A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 とし、任意の点 P が A_5 と A_1 の間にあるものとし、P から各頂点への長さを x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 とする。

$$\angle POA_1 = 2\theta$$

$$\angle A_1 OA_2 = 2\alpha, \left(\alpha = \frac{\pi}{5}\right)$$

とすると、

$$x_k = 2 \sin \{ \theta + (k-1)\alpha \}, (k=1, 2, \dots, 5)$$

となることから、

$$\begin{aligned} &x_1 + x_3 + x_5 - (x_2 + x_4) \\ &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \\ &= 2\{\sin \theta - \sin(\theta + \alpha) + \sin(\theta + 2\alpha) \\ &\quad - \sin(\theta + 3\alpha) + \sin(\theta + 4\alpha)\} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $i = \sqrt{-1}$ を虚数単位として、

$$E = e^{i\theta} - e^{i(\theta+\alpha)} + e^{i(\theta+2\alpha)} - e^{i(\theta+3\alpha)} + e^{i(\theta+4\alpha)}$$

とおくと、上式の { } の中は、E の虚数部となる ($e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$)。

ここで、

$$E = e^{i\theta} \{1 - e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} - e^{3i\alpha} + e^{4i\alpha}\}$$

{ } の中は、初項 1, 公比 $-e^{i\alpha}$, 項数 5 の等比級数であるから、

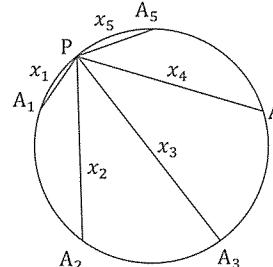
$$= e^{i\theta} \cdot \frac{1 + e^{5i\alpha}}{1 + e^{i\alpha}}$$

$$e^{5i\alpha} = e^{\pi i} = \cos \theta + i \sin \pi = -1 \text{ であるから,} \\ = 0$$

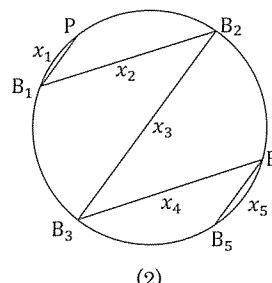
よって、

$$x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4$$

5. 円周角



(1)



(2)

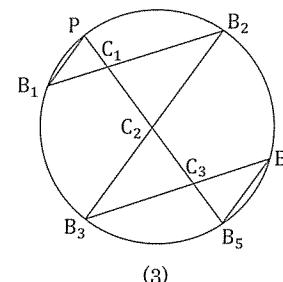


図 7. 円周角

最後に紹介するのは、横浜市・山田正昭さんによるもので、5つの解答の中で最もエレガントな解答であった [1]。これは小学校の算数の知識でも証明できる。ただし幾何のセンスが必要。正5角形の頂点を A_1, A_2, \dots, A_5 、任意の点 P が A_5 と A_1 の間にあり、 PA_1, PA_2, \dots, PA_5 の距離を x_1, x_2, \dots, x_5 とする (図 7(1))。劣弧

A_1A_2, \dots, A_4A_5 に対する円周角は等しく、

$$\angle A_1 PA_2 = \angle A_2 PA_3 = \angle A_3 PA_4$$

$$= \angle A_4 PA_5 = \frac{\pi}{5}$$

である。ここで、線分 PA_1, PA_2, \dots, PA_5 に沿って円を切り開き 6 つの部分に分ける。そして偶数番目の部分だけを裏返して、ふたたび同じ順番に貼り合わせる。頂点を図 7(2) のように振りなおす。

$$\angle PB_1 B_2 = \angle B_1 B_2 B_3 = \angle B_2 B_3 B_4$$

$$= \angle B_3 B_4 B_5 = \frac{\pi}{5}$$

P と B_5 を結ぶ補助線を引き、 B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 との交点を C_1, C_2, C_3 とする (図 7(3))。

弧 B_1B_5 は $2/5$ 円周であるから

$$\angle B_1 PC_1 = \frac{2\pi}{5}, \angle PB_1 C_1 = \frac{\pi}{5} \text{ より}$$

$\angle B_1 C_1 P = \frac{2\pi}{5}$ で、三角形 $PB_1 C_1$ は二等辺三角形である。

同様に三角形 $C_2 B_2 C_1$ 、三角形 $C_2 B_2 C_3$ 、三角形 $B_5 B_4 C_3$ はすべて二等辺三角形となり、

$$B_1 P = B_1 C_1$$

$$B_2 C_2 = B_2 B_1$$

$$B_3 C_3 = B_3 B_2$$

$$B_4 B_5 = B_4 C_3$$

各辺加えると、

$$\begin{aligned} &B_1 P + (B_2 C_2 + B_3 C_3) + B_4 B_5 \\ &= (B_1 C_1 + B_2 C_1) + (B_3 C_3 + B_4 C_3) \end{aligned}$$

より

$$x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4$$

参考文献

- [1] 西山豊「エレガントな解答をもとむ」『数学セミナー』2010年1月号(出題), 4月号(解答・講評) 98-102ページ
- [2] 岩田至康『幾何学大辞典』(横書店) 問題 309

(にしやま ゆたか／大阪経済大学名誉教授)

数学者の選ぶ 「とっておきの数学」

数学セミナー編集部[編]

数学の世界に触れていると語りたくなるほど「推し」に出会えるだろう。多種多様な「好き」から数学の魅力を見つけよう。総勢37名の著者たちが、とっておきの「图形」「式」「予想」を語る。

■定価2,200円(税込)

深めよう位相空間

カントール集合から位相次元まで

大田春外[著]

9月中旬刊

基礎的な内容に発展的な話題を加えた入門書。位相空間の発展の歴史の中から9つの話題を精選し、関連する結果をていねいに解説した。

■定価4,180円(税込)

群と幾何を見る

無限の彼方から

■数学セミナーライブライ

9月下旬刊

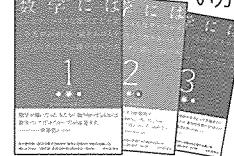
近年注目を集める幾何学的群論の入門書。遙か遠くから空間を粗く眺めて本質をとらえようとする幾何学的群論のアイデアを伝える。

■定価2,750円(税込)

数学にはこんなマーベラスな役立て方や楽しみ方がある という話をあの人やこの人に ディープに聞いてみた本

1・2・3 数学セミナー編集部[編]

各分野で活躍する方が、数学との関わりや意外な使い方、楽しみ方を思う存分に語る。



第1巻では青柳碧人氏、第2巻では棋士の広瀬章人氏、第3巻では実業家の川上量生氏などが登場!

■各定価1,980円(税込)

数学セミナー

9月12日発売

2023年10月号

佐藤幹夫と数学

2023年1月に逝去された数学者・佐藤幹夫氏。「独創的」と言われるその数学について、氏とゆかりのある著者たちが魅力を語る。■インタビュー再録：佐藤幹夫 数学を語る○聞き手：柏原正樹・三輪哲二／超関数○森本光生／総局所解析○竹井義次・河合隆裕ほか ■予価1,199円(税込)

日本評論社 〒170-8474 東京都豊島区南大塚3-12-4
<https://www.nippon.co.jp/> TEL:03-3987-8621/FAX:03-3987-8590