西山　豊

数学を楽しむ

トレミーの定理の応用

つぎの問題は『数学セミナー』のエレガントな解答をもとむに出題したものである [1]．解いてみて楽しくなる問題であり，予期せぬ解答が多く寄せられたので，ここにその解法を詳しく説明したい．

【問題】

正五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ の外接円の任意の点 P から各頂点に線を引き，その長さを x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 とするとき，

$$x_1+x_3+x_5=x_2+x_4$$

を証明せよ．

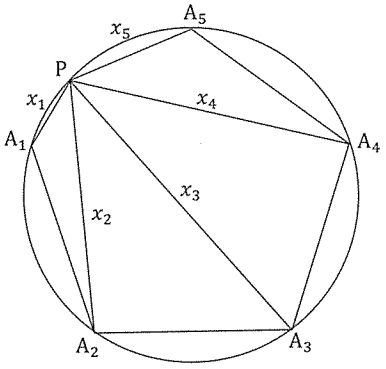

図 1　$x_1+x_3+x_5=x_2+x_4$

1．トレミーの定理

一番多かった解答は，トレミーの定理を用いるもので，中学校の数学の知識で解けるように思う．解法は 5 通りあったが，代表的な解法なのでこれを記事のタイトルとした．

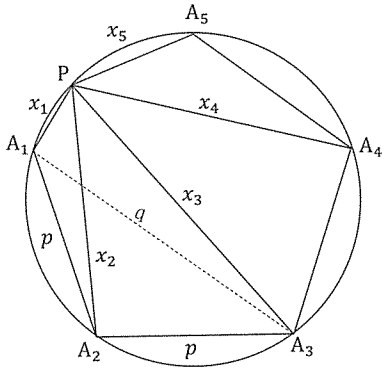

図 2　トレミーの定理

一辺の長さを p，対角線の長さ（点線）を q とする．四角形 $PA_1A_2A_3$ においてトレミーの定理より，

$$x_1p+x_3p=x_2q$$

$$x_1+x_3=x_2\times\frac{q}{p} \tag{1}$$

四角形 $PA_3A_4A_5$ より

$$x_5p+x_3p=x_4q$$

$$x_5+x_3=x_4\times\frac{q}{p} \tag{2}$$

四角形 $PA_2A_3A_4$ より

$$x_2p+x_4p=x_3q$$

$$x_2+x_4=x_3\times\frac{q}{p} \tag{3}$$

(1) と (2) より

$$x_1+2x_3+x_5=(x_2+x_4)\times\frac{q}{p} \tag{4}$$

(3) より

$$x_3=\frac{x_2+x_4}{q/p} \tag{5}$$

(4) と (5) より

$$x_1+x_3+x_5=(x_2+x_4)\times\left(\frac{q}{p}-\frac{1}{q/p}\right)$$
$$=(x_2+x_4)\times\left(\varphi-\frac{1}{\varphi}\right)$$

ここに

$$\varphi=\frac{q}{p}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\quad(\varphi\text{ は黄金比})$$
$$\varphi-\frac{1}{\varphi}=1$$

よって

$$x_1+x_3+x_5=x_2+x_4$$

【別解】

トレミーの定理を用いる四角形を工夫すれば，式はもっと簡単になる．四角形 $PA_3A_4A_5$ より，

$$x_5p+x_3p=x_4q$$

四角形 $PA_1A_3A_4$ より

$$x_1p+x_4q=x_3q$$

上の 2 式より

$$(x_1+x_3+x_5)p=x_3q \qquad (*)$$

四角形 $PA_2A_3A_4$ より

$$x_2p+x_4p=x_3q \qquad (**)$$

$(*)$ と $(**)$ より

$$(x_1+x_3+x_5)p=(x_2+x_4)p$$
$$x_1+x_3+x_5=x_2+x_4$$

2. 余弦定理

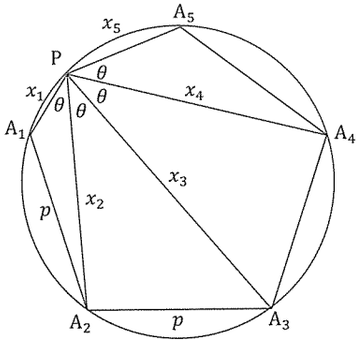

図 3. 余弦定理

高校数学で学ぶ余弦定理を使った証明は次のようになる．

一辺の長さを p，円周角を θ とする．

三角形 PA_1A_2，三角形 PA_2A_3，三角形 PA_3A_4，三角形 PA_4A_5，三角形 PA_5A_1 の余弦定理より，

$$p^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\cos\theta \qquad (1)$$
$$p^2=x_2^2+x_3^2-2x_2x_3\cos\theta \qquad (2)$$
$$p^2=x_3^2+x_4^2-2x_3x_4\cos\theta \qquad (3)$$
$$p^2=x_4^2+x_5^2-2x_4x_5\cos\theta \qquad (4)$$
$$p^2=x_1^2+x_5^2-2x_1x_5\cos 4\theta \qquad (5)$$

ここで，式 (5) はつぎのように変形できる．

円周角 θ は正五角形より，

$$\theta=\frac{\pi}{5}$$
$$4\theta=\pi-\theta$$
$$\cos 4\theta=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$

より

$$p^2=x_1^2+x_5^2+2x_1x_5\cos\theta \qquad (5)'$$

隣接する 2 つの三角形の余弦定理の式から p を消去するとつぎの 5 式が得られる．

(1) と (2) より

$$x_1+x_3=2x_2\cos\theta \qquad (6)$$

(2) と (3) より

$$x_2+x_4=2x_3\cos\theta \qquad (7)$$

(3) と (4) より

$$x_3+x_5=2x_4\cos\theta \qquad (8)$$

(4) と (5)′ より

$$x_4-x_1=2x_5\cos\theta \qquad (9)$$

(5)′ と (1) より

$$x_5-x_2=-2x_1\cos\theta \qquad (10)$$

x_1, x_3, x_5 を含む項を左に，x_2, x_4 を含む項を右に分け，合計すると，

$$(2+2\cos\theta)(x_1+x_3+x_5)$$
$$=(2+2\cos\theta)(x_2+x_4)$$

より

$$x_1+x_3+x_5=x_2+x_4$$

【別解】

余弦定理を使わなくても，(6) ～ (10) の式が得られることを示そう．

一辺の長さを p，円周角を とする．三角形 PA_1A_2 を A_2 を中心に回転させ，A_1 が A_3 に重なるようにする．

P の移動先を P′ とすれば，P, A_3, P′ は一直線に並び，三角形 PA_3P' は二等辺三角形になる (図 4)．

$$PP'=2\times PA_2\cos\theta$$

より

$$x_1+x_3=2x_2\cos\theta$$

同様に，三角形 PA_2A_3 を A_3 を中心に，三角形 PA_3A_4 を A_4 を中心に，三角形 PA_4A_5 を A_5 を中心に，三角形 PA_1A_5 を A_1 を中心に回転させることで，(7) ～ (10) が得られる．これなら中学数学で解ける．要は幾何のセンスだ．

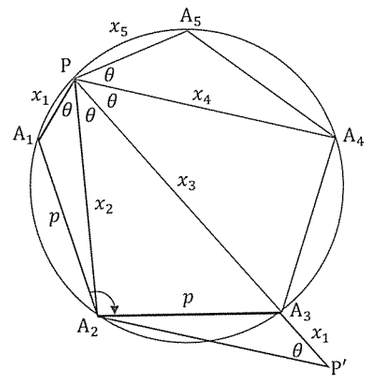

図 4. $x_1+x_3=2x_2\cos\theta$

3. 二等辺三角形

つぎに紹介するのは岩田至康の『幾何学大辞典』に掲載されていたもので x_1, x_3, x_5 と x_2, x_4 を移動して二等辺三角形にするもので，幾何のセンスがいる [2]．

一辺 A_1A_2 上の円周角を α とすると，$5\alpha=\pi$ である．PA_1 を延長して $A_1B=PA_5$ となるように B をとる．円周角が等しいことから $\angle PA_5A_3=\angle PA_4A_3$，円に内接する四角形 $PA_1A_3A_4$ より $\angle PA_4A_3=\angle BA_1A_3$，三角形 PA_5A_3 と三角形 BA_1A_3 は，2 辺と挟角が等しいから ($PA_5=BA_1$, $A_5A_3=A_1A_3$, $\angle PA_5A_3=\angle BA_1A_3$) 合同である．

$A_3P=A_3B$ より，三角形 BA_3P は二等辺三角形になる．

三角形 BA_3P の内角の和は π であり，$5\alpha=\pi$ であるので $\angle BA_3P=\alpha$ となる．

同様にして，PA_2 を延長して $A_2C=PA_4$ となるように C をとる．円に内接する四角形 $PA_2A_3A_4$ より $\angle PA_4A_3=\angle CA_2A_3$ であり，$PA_4=CA_2$, $A_3A_4=A_3A_2$ より，三角形 PA_3A_4 と三角形 CA_3A_2 は合同である．

$\angle A_2CA_3=\angle A_4PA_3=\alpha$ となる．三角形 A_3PC は二等辺三角形である．

つぎに PA_3 を延長して $A_3D=PB$ となるように D をとる．$\angle CA_3D=\angle A_3PC+\angle A_3CP=2\alpha$

$A_3C=BA_3$, $A_3D=BP$, $\angle CA_3D=\angle A_3BP$ より，三角形 A_3CD と三角形 BA_3P は合同である．

$\angle A_3CD=\angle BA_3P=\alpha$ となる．

$$\angle PCD=\angle PCA_3+\angle A_3CD=2\alpha,$$
$$\angle PCD=\angle PDC$$

より，三角形 DPC は二等辺三角形になる．

PC=PD となる．

$$PC=PA_2+A_2C=PA_2+PA_4$$

および

$$PD=PA_3+A_3D$$
$$=PA_3+PB=PA_3+PA_1+PA_5$$

より

$$PA_1+PA_3+PA_5=PA_2+PA_4$$
$$x_1+x_3+x_5=x_2+x_4$$

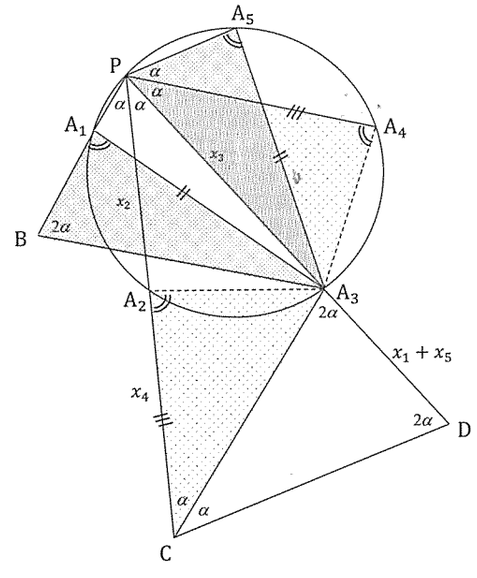

図 5. 二等辺三角形

4. 極座標

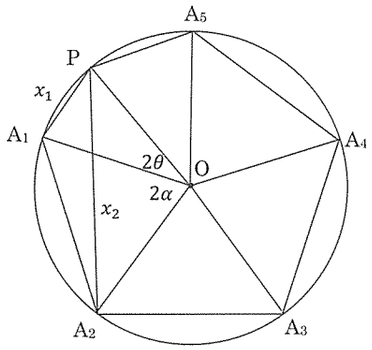

図 6. 極座標

つぎに紹介するのは極座標を使い，複素数や等比級数が出てくるので高校数学の知識が必要である．意外とシンプルに証明できる．

外接円を原点 O の単位円とし，正五角形の頂点を A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 とし，任意の点 P が A_5 と A_1 の間にあるものとし，P から各頂点への長さを x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 とする．

$$\angle \mathrm{POA}_1 = 2\theta$$

$$\angle A_1OA_2 = 2\alpha,\ \left(\alpha = \frac{\pi}{5}\right)$$

とすると，

$$x_k = 2\sin\{\theta + (k-1)\alpha\},\ (k = 1, 2, \cdots, 5)$$

となることから，

$$\begin{aligned} &x_1 + x_3 + x_5 - (x_2 + x_4) \\ &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \\ &= 2\{\sin\theta - \sin(\theta+\alpha) + \sin(\theta+2\alpha) \\ &\qquad - \sin(\theta+3\alpha) + \sin(\theta+4\alpha)\} \end{aligned}$$

が成り立つ．$i = \sqrt{-1}$ を虚数単位として，

$$E = e^{i\theta} - e^{i(\theta+\alpha)} + e^{i(\theta+2\alpha)} - e^{i(\theta+3\alpha)} + e^{i(\theta+4\alpha)}$$

とおくと，上式の｛ ｝の中は，E の虚数部となる（$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$）．

ここで，

$$E = e^{i\theta}\{1 - e^{\alpha i} + e^{2\alpha i} - e^{3\alpha i} + e^{4\alpha i}\}$$

｛ ｝の中は，初項 1，公比 $-e^{\alpha i}$，項数 5 の等比級数であるから，

$$= e^{i\theta} \cdot \frac{1 + e^{5\alpha i}}{1 + e^{\alpha i}}$$

$e^{5\alpha i} = e^{\pi i} = \cos\theta + i\sin\pi = -1$ であるから，

$$= 0$$

よって，

$$x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4$$

5. 円周角

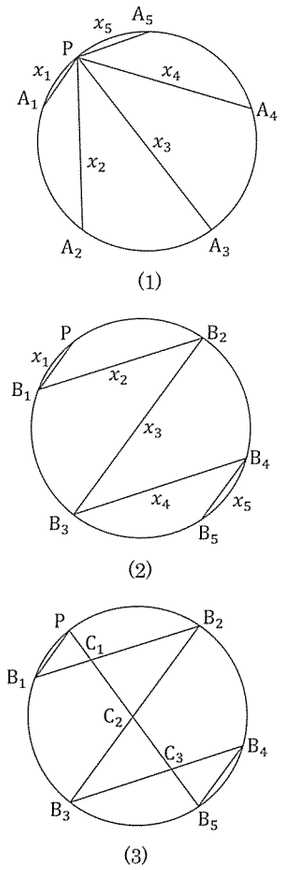

図 7. 円周角

最後に紹介するのは，横浜市・山田正昭さんによるもので，5 つの解答の中で最もエレガントな解答であった [1]．これは小学校の算数の知識でも証明できる．ただし幾何のセンスが必要．正 5 角形の頂点を $A_1, A_2, \cdots, A_5$，任意の点 P が A_5 と A_1 の間にあり，$PA_1, PA_2, \cdots, PA_5$ の距離を $x_1, x_2, \cdots, x_5$ とする（図 7 (1)）．劣弧 $A_1A_2, \cdots, A_4A_5$ に対する円周角は等しく，

$$\angle A_1PA_2 = \angle A_2PA_3 = \angle A_3PA_4$$

$$= \angle A_4PA_5 = \frac{\pi}{5}$$

である．ここで，線分 $PA_1, PA_2, \cdots, PA_5$ に沿って円を切り開き 6 つの部分に分ける．そして偶数番目の部分だけを裏返して，ふたたび同じ順番に貼り合わせる．頂点を図 7 (2) のように振りなおす．

$$\angle PB_1B_2 = \angle B_1B_2B_3 = \angle B_2B_3B_4$$

$$= \angle B_3B_4B_5 = \frac{\pi}{5}$$

P と B_5 を結ぶ補助線を引き，B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 との交点を C_1, C_2, C_3 とする（図 7 (3)）．

弧 B_1B_5 は 2/5 円周であるから $\angle B_1PC_1 = \frac{2\pi}{5}$，$\angle PB_1C_1 = \frac{\pi}{5}$ より $\angle B_1C_1P = \frac{2\pi}{5}$ で，三角形 PB_1C_1 は二等辺三角形である．

同様に三角形 $C_2B_2C_1$，三角形 $C_2B_2C_3$，三角形 $B_5B_4C_3$ はすべて二等辺三角形となり，

$$B_1P = B_1C_1$$
$$B_2C_2 = B_2C_1$$
$$B_3C_2 = B_3C_3$$
$$B_4B_5 = B_4C_3$$

各辺加えると，

$$\begin{aligned} &B_1P + (B_2C_2 + B_3C_2) + B_4B_5 \\ &= (B_1C_1 + B_2C_1) + (B_3C_3 + B_4C_3) \end{aligned}$$

より

$$x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4$$

参考文献

[1] 西山豊「エレガントな解答をもとむ」『数学セミナー』2010 年 1 月号（出題），4 月号（解答・講評）98–102 ページ

[2] 岩田至康『幾何学大辞典』（槇書店）問題 309

（にしやま　ゆたか／大阪経済大学名誉教授）