



虫食い算

西山 豊 (大阪経済大学)



1. 美しいパズル

私がこれから紹介する虫食い算は、ニチイ企画・芦ヶ原伸之監修の「地下鉄駅間クイズ」で仕入れたものである。地下鉄の車内の扉の上に掲載されていた。

問題がすぐ読めて、2～3区間の時間で考えられ、ちょっとした頭の体操になり、見なれた広告に比べれば気のきいた試みである。数週間後に解答が示され、また新しいクイズが出されるという仕組みになっている。

5桁と5桁の数字を掛けあわせると、123456789になるという。その数字を答えよというクイズだ。

$$\begin{array}{r} \square\square\square\square\square \\ \times\square\square\square\square\square \\ \hline 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \end{array}$$

私は、虫食い算はあまり好きではない。解いているうちにイライラし、投げ出してしまうことが多いからだ。でも、このクイズ、あまりにも形が美しいので解いてみることになった。電卓だけで半日かかった。

クイズの出題者が知りたくて、参考文献1)をもとに調べると、山本行雄氏であることがわかった。氏の所属する“数芸パズル愛好会”に手紙して会誌(参考文献2))を送って頂いた。この小冊子をパラパラとめくっていると、ある会員のパズル紹介の後記に「後日詳報する積りですが、手術待ちの退屈のぎで失礼しました。5月1日手術予定、只今S病院循環器部気付、Pace Maker」とあった。年老いても、心身不自由でも、パズルの魅力は生きる力を与えるものだな、と感心した。この方、お元気だろうか。

「地下鉄駅間クイズ」のシリーズ、残念ながら現在はもう行われていない。是非とも再開を期待したい。

2. 電卓だけで解こう

このクイズは、情報化時代を反映してか、パソコンを駆使して探したしたものと思われる。パソコンで問題を作ったのだから、パソコンで解けばよいというのが正論だろうが、このように短絡してしまえば、芸がない。ここでは、パソコンを使わないで解く方法を考えてみよう。

学生には、次のようなヒントを与えておこう。

- 1) 答えは必ずあること
 - 2) 素因数分解を用いることが秘訣
 - 3) 8桁の電卓(ルート√つき)を用いてよい以上で充分である。根気よくやれば必ずできるはずだ。ただし、
 - 4) 素数表を見ては駄目
- ということも忘れずに。これはルール違反だ。

3. 解き方の説明

電卓は、8桁が普通である。 $2^3=8$ 、つまり2進数からくるハード的な理由からだろうか。景品として配られるソーラ(光のエネルギー)だけで使えるカード大の電卓は、すべて8桁だ。10桁電卓というのは、あまり耳にしたことがない。

「先生、そんなことないですよ。10桁や12桁のものも出まわっていますよ」

本当かな、と思って電気屋さんに行って確かめてみると、10桁や12桁のものも売られていた。それだけ消費者の需要があるのだろうか。でも少し値段が高かった。

さて、数字123456789を素因数分解していく訳だが、この数字は9桁あり、8桁電卓には入らない。そこで筆算をしよう。

最下位の桁が偶数なら2で割れる。5または0なら5で割れるなどである。この場合、最下位の桁が9であるから、2も5も素因数にないことが

わかる。

さて、どうしよう。

そうそう、3で割れるかどうかを調べる方法があった。それを使ってみよう。手順は次のようになる。

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

$$4+5=9$$

9は3で割れるから、筆算で次のようになる。

$$123456789 \div 3 = 41152263$$

同様な手順で、

$$4+1+1+5+2+2+6+3=24$$

$$2+4=6$$

6は3で割れるから、

$$41152263 \div 3 = 13717421$$

以上、整理すると、

$$123456789 = 3 \times 3 \times 13717421$$

となる。

「先生、そのように2回も計算しなくても、最初の段階で、9で割れることが分かるのではないですか。例えばですよ、4桁の数字abcdは

$$\begin{aligned} &1000a+100b+10c+d \\ &=(999a+a)+(99b+b)+(9c+c)+d \\ &=(999a+99b+9c)+(a+b+c+d) \end{aligned}$$

となり、前の項は9で割れることが分かっていますから、後の項だけが問題になります。したがって、先ほど1から9まで足された時45になりましたね。45は9で割れるから、筆算でいきなり9で割ればよいのですよ」

「すまん、すまん。すっかり忘れていた。人間は忘れる動物であるとも言われる。忘れることができるから、生きていけるのだ。情報量のこれだけ多い時代、忘れられないならそれこそノイローゼになってしまう。“忘却とは忘れさることなり。忘れ得ずして忘却を誓う心の悲しさよ…”」

「先生、それ何ですか？」

「菊田一夫のNHK連続放送劇『君の名は』の冒頭のナレーションだよ。ただし、戦後まもなくのラジオドラマであるから(1952.4.10～1954.4.8)、君たちは知らないと思うが、敗戦後の世相を背景に追った恋愛メロドラマで、放送の始まる午後8時30分には銭湯の女湯がからになると言われるほどの空前の反響をよんだものだ。

私は当時小学1年生の頃だったが、ああいう純愛ものもいいね。また、あれだけ人の心をとらえ

るというドラマもいいね。それに比べて、最近のテレビは腐っている。見れば見るほど人間が馬鹿(関西弁)になる。内容のない番組なら放映しないほうがまだ」

「また、先生の独り言だ」

4. 根号(ルート)の登場

ここからが大変だ。でも、8桁の数字におとすことができたので、電卓がフルに使える。さて、どうしよう。

根号(ルート)をとってみよう。

$$\sqrt{13717421} = 3703.7036$$

掛け算のバランスの関係から、3703の近辺の素数を見つければよいことが想像できるはずだ。

ここで、最初にもどって、掛けあわせた結果が123456789で先頭の桁(1億の桁)が1であるから、マス目の先頭は両方とも1が入ると考えるのが妥当である。つまり、10000から19999の範囲内の数字であるだろうということだ。

先ほど、 3×3 で素因数に分解したから、次の計算をする。

$$10000 \div 3 = 3333.\dot{3}$$

$$19999 \div 3 = 6666.\dot{6}$$

以上のことを整理すると、3332から6667の範囲内で、3703を中心に素数を見つけよということになる。

$$6667 - 3332 = 3335$$

だから、3335回も電卓をたたけとやることですか」

そんなことは、ありません。3703を中心に考えればよいわけだから、

$$6667 - 3703 = 2964 \quad (\text{Aコース})$$

$$3703 - 3332 = 371 \quad (\text{Bコース})$$

のどちらかでよいことになります。あなた、どちらを選びますか？」

「もちろん、Bコースですよ。でも371回も電卓たたくのですか」

「先生、AコースとBコースには、あまりにも差がありすぎると思いませんか？」

「そうだね、私も気になっていたが」

「いま、仮に一方の数字を10000とします。するともう一方は12346以下ということになりますね。

$$\text{計算式では、} 10000 \times 12346 = 123460000 >$$

123456789 となります。ですから、 $19999 \div 3 = 6666.6$ とされましたが、 $12346 \div 3 = 4115.3$ のほうが正しく、 $4116 - 3703 = 413$ (Cコース)もあるということですね

「まったく、その通りだ」
「371回と413回だから、やはりBコースということになりますね」

5. 九九の表

「Bコースとしても、371回も電卓をたたくことになりますね」

はい、ここで注目。13717421の数字の最下位です。末尾の桁が1ですね。掛け算の九九を思い出して下さい。掛け合わせた結果1の位が1になるのは、

$$\begin{array}{ll} 1 \times 1 = 1 & 7 \times 3 = 21 \\ 3 \times 7 = 21 & 9 \times 9 = 81 \end{array}$$

の4通りしかないのですよ。だから、割り算をする場合の除数の末尾の桁は、1, 3, 7, 9だけでいいのですよ。数字10個のうちの4個分だけを調べればよいから、電卓をたたくのは371回の半分以下に減ることになります。これでだいぶ楽になったでしょう。

6. 小数点以下に注目

これからは根気がいりますよ。でも、あと一息だから頑張りましょう。13717421を3703から3332まで数字をとばしながら割っていきましょう。小数点以下3桁目は、四捨五入せずに切り捨てて書き上げていきます。

$$\begin{array}{l} 13717421 \div 3703 = 3704.40 \\ \div 3701 = 3706.40 \\ \div 3699 = 3708.41 \\ \div 3697 = 3710.41 \end{array}$$

小数点以下が気になります。40とか41というように、微増するだけで一向に改善されません。すかっとなさわやか□□□□□のように、0になりません。

えい！ 思いきって除数をとばせ。

$$\begin{array}{l} \div 3659 = 3748.95 \text{ (おお、なかなかいいぞ)} \\ \div 3657 = 3751.0038 \text{ (おいしいなあ)} \\ \div 3653 = 3755.11 \text{ (また、増えだした)} \end{array}$$

このようにして、商の小数点以下2桁に注目していきます。最初はゆるやかに、しだいに大きく

増加していきます。00から.99の値を単調に増加し、「のこぎり波」のように周期性をもっていることに気づきます。夢よもう一度。

$$\begin{array}{l} 13717421 \div 3649 = 3759.22 \\ \div 3639 = 3769.55 \\ \text{(変化が激しい、慎重に！)} \\ \div 3629 = 3779.94 \\ \div 3627 = 3782.0295 \\ \text{(おいしい)} \\ \div 3617 = 3792.48 \\ \div 3607 = 3803 \\ \text{(ヤッター)} \end{array}$$

このようにして素因数分解は完了しました。

$$123456789 = 3 \times 3 \times 3607 \times 3803$$

となります。ちなみに3607と3803は素数です。これらの素因数を組み合わせると、虫食い算の答えは、

$$\begin{array}{r} 10821 \\ \times 11409 \\ \hline 123456789 \end{array}$$

となります。もっと別の解き方があるかも知れませんが、あれば、教えて下さい。でも、こつこつやれば電卓だけで解けたではありませんか。

今の中学校、高校の数学は問いと答えがセットになっていて、丸暗記の教育になっています。たまにはこういう問題もあっていいのではないのでしょうか。

7. こんなクイズもある

以上の虫食い算は、数式で表すと

$$xy = k \quad (1)$$

において、

$$k = 123456789 \text{ (整数)} \quad (2)$$

とした時、 $\{x, y\}$ の整数解を求める問題になります。(1)式を変形すると、

$$y = k/x \quad (3)$$

となり、これは双曲線です(図1)。

この双曲線において、格子点と重なったときの解になるのです。解の対称性から、格子点と重なるのは $x=y$ では2箇所ということになります。

作者の山本行雄氏は、この美しい虫食い算を偶然にも発見されたのだと思います。私はこの問題を見たとき、何か「数論の一大定理」がひそんでいるのではないかと期待を胸にふくらませましたが、調べていくうちに、たんなる偶然であり、

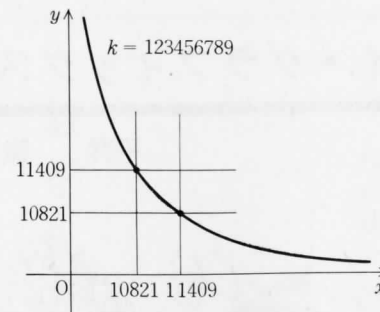


図1. $y = k/x$

「美しい誤解」であることを知りました(参考文献3))。

k をいろいろ変化させていくと類似の問題がいくつも作れます。たとえば、つぎの虫食い算も立派な問題です。

$$\begin{array}{r} \square\square\square\square\square \\ \times \square\square\square\square\square \\ \hline 123456784 \end{array}$$

今までと同じ手順で、素因数分解すれば、

$$\begin{aligned} 123456784 &= 2^4 \times 11^2 \times 43 \times 1483 \\ &= (2 \times 11^2 \times 43) \times (2^3 \times 1483) \\ &= 10406 \times 11864 \end{aligned}$$

となり、答えは

$$\begin{array}{r} 10406 \\ \times 11864 \\ \hline 123456784 \end{array}$$

となります。でもこんな問題、誰も振り向かないでしょうね。末尾の数が9と4の、ただここが違うだけでクイズに対する魅力が変わるのです。種を知ってしまえば、面白くないのは手品に似ています。

美しいパズルの創作者、山本行雄氏に拍手を。

参考文献

- 1) 大駒誠一他『虫食い算パズル700選』共立出版
- 2) 鈴木昭雄『数芸パズル』数芸パズル愛好会
- 3) 西山豊『くらしのアルゴリズム』第8章「美しいパズル」ナカニシヤ出版

(にしやま ゆたか)

グロタンディークの
ある過去についての省察と証言

「収穫と蒔いた種と」の第2部 数学と裸の王様 ～ある夢と数学の埋葬～

辻 雄一 訳 A5 2,987円

遺産と遺産相続者たち / ピエールとモチーフ / 上流社会 / 埋葬された人びと。

数学教室の窓から ～問題作りの風景～

中沢貞治 著 A5 2,575円

大学入試問題などから、美しく、おもしろいものを選び、解法を心ゆくまで論じる。本書の性格を一言で表わせば“人間と数学を愛する者のField Work”である。

ダイナミクス-力学系 ～ふるまいの幾何学～

エイブラハム / ショー 共著 東保光彦 訳
B5上, 下巻各3,914円

こんにち、数学に抵抗を感じる人が少なくない。数学は難しいという漠然とした印象や、教育制度の構造的な欠陥や、その他の原因によって、数学は難解なものということになってしまっている。多くの知識人の議論で、数学の知恵がまったく無視されていることもしばしばである。数学のカリキュラムに、視覚に訴える表現が欠けていることも問題のひとつで数学への無関心と数学拒否症を助長している。本書はいわば劇画風力学系の解説書である。証明はないし、数式さえほとんどない。その代わり工夫を凝らしたイラストがいっぱいである。というより図が主役でそれに解説が付随しているわけである。数学のアイデアを目に見えるようにして、できるだけ多くの人に理解してもらおうというのが本書の目的である。

上-周期的なふるまい 下-カオス的なふるまい

現代数学社 606京都市左京区鹿ヶ谷西寺ノ前町1
(075) 751-0727 振替 京都1-11144