$$=(3^{12}-2^{12})-2(2^{12}-1^{12})+(1^{12}-0^{12})$$
$$=3^{12}-3\times2^{12}+3\times1^{12}-0^{12}$$
$$\cdots\cdots$$

となって，求める値になることが分ります．

A．定義に基づいて，きちんと計算すればよいのですね．

B．そうです．1774年**ラプラス**はこの問題を**『再帰循環級数とその応用についての論文**（*Mémoire sur les suites récurro-récurrentes et sur leurs usages*）**』**の中で，第４問題として取り上げています．それは

> n 枚の札からなる富籤が $1, 2, \cdots, n$ と番号がつけられている．毎回 p 枚抽出される．x 回抽出の後，すべての番号が抽出されていた確率はいくらか．

というものです．毎回の抽出は非復元で，毎回抽出後は p 枚を元へ戻すものであることが，問題文では省略されています．$n=f=r$，$x=n$，$p=1$ とおきますと，ド・モワブルが取扱ったロバーツの問題に相当します．

A．サイコロ投げ，玉の分配，富籤と，状態は違いますが，実は皆同じ事柄のそれぞれ違った側面だったのですね．

場所占めの問題の近似解

B．ド・モワブルは『籤の測定について』の問19，**『偶然論』**（第２版）問 XXXIX で，

$$\sum_{x=0}^{r}(-1)^x\binom{r}{x}\left(1-\frac{x}{f}\right)^n=\frac{1}{2} \tag{6}$$

を満す n の近似解を求めています．つまり公正な賭けをするには，何回試行すればよいかを探究しています．$x<r\ll f$ の時（x が f に比べて極めて小さい時）

$$\left(1-\frac{1}{f}\right)^x=1-\frac{x}{f}+\binom{x}{2}\frac{1}{f^2}-\cdots\fallingdotseq1-\frac{x}{f} \tag{7}$$

という近似式が得られます．そうしますと(6)は

$$\sum_{x=0}^{r}(-1)^x\binom{r}{x}\left(1-\frac{1}{f}\right)^{xn}\fallingdotseq\frac{1}{2} \tag{8}$$

となります．(8)式は

$$\left\{1-\left(1-\frac{1}{f}\right)^n\right\}^r\fallingdotseq\frac{1}{2},\quad\left(1-\frac{1}{f}\right)^n\fallingdotseq1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/r}$$

後の式において両辺の対数を取りますと

$$n\log\left(1-\frac{1}{f}\right)\fallingdotseq\log\left\{1-\sqrt[r]{\frac{1}{2}}\right\} \tag{10}$$

から n が得られます．普通のサイコロを投げ，どの目も少くとも１回出る確率を 1/2 にするには，n はいくらになりますか？

A．$f=6$，$r=6$ を(10)式に代入すればよいですね．

$$n\log5/6=\log\{1-1/\sqrt[6]{2}\}$$
$$-0.07918n=-0.962175,\quad n\fallingdotseq12.15$$

となりますから，求める確率は $n=12$ ならば 1/2 以下，$n=13$ ならば 1/2 以上と考えて差し支えありませんか．

B．正確な計算では $n=12$ で確率は0.43782，$n=13$ で確率は0.53331ですから，結構よい近似公式だと思います．

（あんどう　ひろみ）

積み木問題

西山　豊（大阪経済大学）

１．収束と発散

高校から大学にかけての『微分・積分』の教科書の中に数列と級数がある．その中で必ずといってよいほど，つぎの例題がでている．

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

は発散し，

$$1^2+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

は収束する．

数列の一般項が０に収束しても，無限級数が発散することもあるという興味ある例題である．

このことは，積分をすることによって概略を知ることができる．つまり，

$$\Sigma\frac{1}{n}\fallingdotseq\int\frac{dx}{x}=[\log x]$$
$$\Sigma\frac{1}{n^2}\fallingdotseq\int\frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]$$

となり，前者は log のオーダーで発散し（図１）後者は収束する（図２）．

一般に，無限級数 $\Sigma\frac{1}{n^p}$ $(p>0)$ は，$p\leqq1$ ならば発散し，$p>1$ ならば収束する．

また，$\Sigma\frac{1}{n^2}$ は $\frac{\pi^2}{6}$ に収束することも知られている．

$\Sigma\frac{1}{n}$ が収束するかどうかは，数列の収束に関する Cauchy の判定条件でもとまる．

数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ の最初の n 項の和を

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

とする．

級数 Σa_n が収束するための必要十分条件は，任意に与えられた正の数 ε に対し N を十分大きくとれば，$m>n>N$ であるすべての n, m に関して

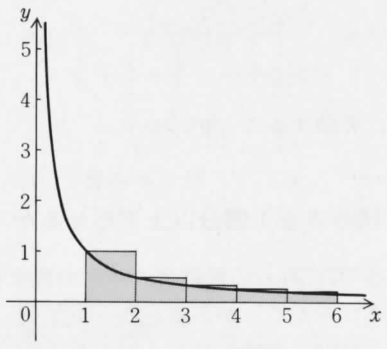

図１　$y=\frac{1}{x}$

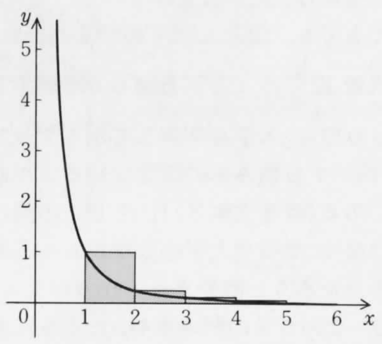

図２　$y=\frac{1}{x^2}$

$$|S_m-S_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m|<\varepsilon$$

が成立することである．

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

とおく．n をいくら大きくとっても，

$$|S_{2n}-S_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$
$$>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{個}}$$
$$=\frac{1}{2}$$

となり，Cauchy の収束判定条件をみたさない．

よって $\Sigma\frac{1}{n}$ は発散する．

もう少し，具体的に見てみる．項の数 $2n$ を 2, 4, 8…のように 2 のベキ乗にとっていくと，

$$|S_2-S_1|=\frac{1}{2}$$

$$|S_4-S_2|=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$|S_8-S_4|=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\quad\cdots$$

$$\begin{aligned}|S_{2n}-S_1|&=|S_{2n}-S_n|+\cdots+|S_8-S_4|\\&\quad+|S_4-S_2|+|S_2-S_1|\\&>\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となり，発散することがわかる．

2．積み木を1個分以上ずらせるか

ところで，これらの級数は一体何の意味を持つのか考えてみたことがあるだろうか．

数学とは別に意味などあるわけない，こういうものだと割り切ってしまえばよいが，私などこだわり性の者には，たとえ受験でパスしても，証明問題ができても，気になるものである．

私が級数 $\Sigma\frac{1}{n}$ を，もっと楽しく理解できるようになったのは，大学を卒業してからずっとたって，次に説明する積み木の問題を知るようになってからである（参考文献2））．もしこの話しを知っていたなら，高校や大学の数学がもっと面白いものであったろうと悔やまれて仕方がない．

今，均一な大きさの積み木が，たくさんあったとする．そこで，この積み木を少しずつずらしながら積んでいって，一番下の積み木と一番上の積み木の位置を一個分以上ずらせるだろうかという問題である（図3）．

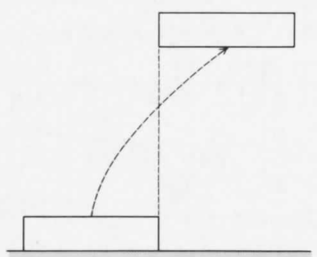

図3　1個分以上ずらせるか

「そんなことできるわけない」

と誰しも思うであろう．そして，

「ずらすことができても半分を越えることはできない」

ときめているのではなかろうか．しかし，

「かならずできます」

といえば，少しは考えてみるだろうか．さらに，

「5個あれば十分です」

と，そこまでヒントをだせば，本腰をいれて考え正解が出せるであろうか．

3．重心の計算

これは，重心の計算問題である．紙と鉛筆で計算するより，実際に積み木を用いて試行錯誤的に答えを求めたほうが意外と早くわかるかもしれない．

積み木は下から上に積んでいくものだが，下においていくものとする．つまり，積み木①の下に積み木②を，その下に積み木③を順に置いていくのだ．図を参照しながら説明していこう．

まず，積み木①と積み木②について考えてみる．

これは，明らかに $\frac{1}{2}$ しかずらすことができないだろう（図4）．

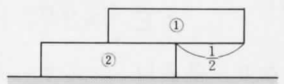

図4　$\frac{1}{2}$ ずらす

つぎに積み木③をこの下に置くわけだが，積み木①と積み木②をあわせた重心を考える．積み木③は，この重心までずらせるから，

重心の位置 ≡ ずらす距離 $=x$

としてモーメントを求めてみる．モーメントは，

モーメント＝重さ×うでの長さ

であるから，

積み木①のモーメント（右回り）は，

$$1\times x$$

積み木②のモーメント（左回り）は，

$$1\times\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

となり，これらが等しいから，

$$1\times x=1\times\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

これを解いて

$$x=\frac{1}{4}$$

となる．つまり，積み木③のずらす距離は $\frac{1}{4}$ であることになる（図5）．

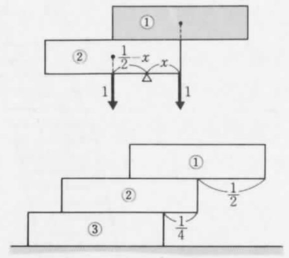

図5　$\frac{1}{4}$ ずらす

つぎに積み木④を置くわけだが，積み木①から積み木③までをあわせた重心を考える．同様に，

重心の位置 ≡ ずらす距離 $=x$

としてモーメントを求めてみる．

積み木①と②のモーメント（右回り）は，

$$2\times x$$

積み木③のモーメント（左回り）は，

$$1\times\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

となり，これらが等しいから，

$$2\times x=1\times\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

これを解いて

$$x=\frac{1}{6}$$

となる．つまり，積み木④のずらす距離は $\frac{1}{6}$ であることになる（図6）．

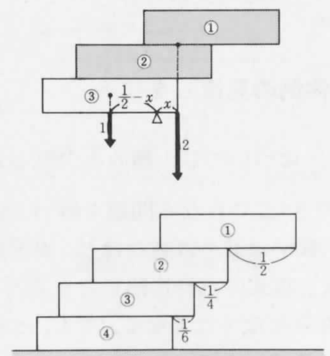

図6　$\frac{1}{6}$ ずらす

以下同様にして，ずらす位置は，

$$3\times x=1\times\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

より

$$x=\frac{1}{8}$$

と求められていく．

一般に，n 個の積み木の重心を求めてみよう．これは，$(n-1)$ 個の積み木と1個の積み木の重心として求まるから，

$$(n-1)\times x=1\times\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

より

$$x=\frac{1}{2n}$$

となる（図7）．これを整理すると，ずらす位置を

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10},\cdots\frac{1}{2n},\cdots$$

としていくと積み木を倒さずに積んでいけるのである．

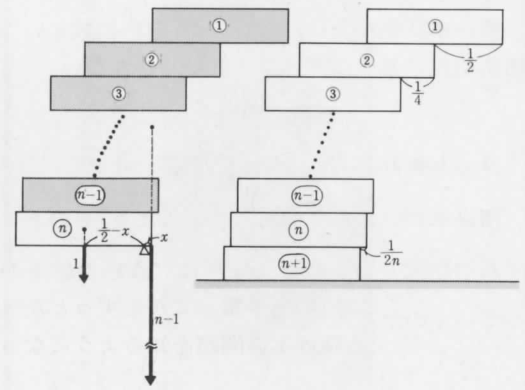

図7　$\frac{1}{2n}$ ずらす

このずらす距離と合計が例題に示した数列と級数であったのだ．

各項の逆数の作る数列が等差数列であるものを調和数列という．$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\cdots$ や $1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7}\cdots$ は調和数列である．調和数列は，古代ギリシャのピタゴラス学派が和声の理論を研究したときに使われたといわれており，調和数列の名もこれに由来している．

級数 $\Sigma\frac{1}{n}$ は調和級数とよばれているが，これは積み木問題で現実との対応がつけられた．

そこで，この級数を計算してみよう．

$\frac{1}{2} \qquad\qquad\qquad =0.5$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \qquad\qquad =0.75$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6} \qquad =0.9167$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8} =1.0417>1$

これで積み木が5個あれば一個分以上ずらせることが分かる（図8）.

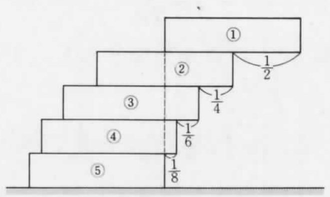

図8　1個分ずらせる

積み木問題が先にあったのか，調和級数という用語が先にあったのか，それはわからない.

4．log *n* のオーダーで発散

積み木がいくらでもあったとしよう．そのときずれの距離である級数 $\Sigma\frac{1}{2n}$ はどういう値をとっていくのだろうか.

$$\Sigma\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{n}$$

であり，さきに説明したように，級数 $\Sigma\frac{1}{n}$ は∞に発散することが分かっているから，積み木がいくらでもあれば，無限大にずらせることができるということになる.

理論上はそういうことになるが，実際はどうだろうか.

$$n=4 \text{ のとき } \Sigma\frac{1}{2n}=1.0417>1$$

$$n=31 \text{ のとき } \Sigma\frac{1}{2n}=2.0136>2$$

$$n=227 \text{ のとき } \Sigma\frac{1}{2n}=3.0022>3$$

となる.

つまり，発散するとはいえ log *n* のオーダーで発散するのであるから，非常に遅い速度である．積み木1個分ずらすには5個でよかったが（4＋1)，積み木2個分ずらすには32個いり（31＋1)，積み木3個分ずらすには228個もいることになる（227＋1).

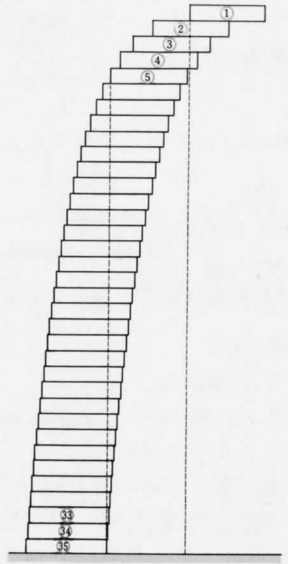

図9　2個ずらし

また，現実に32個も正確にずらしながら積み上げることは不可能である．図9に示したのは少し余裕をもって35個を積み上げげた形ではあるが，これは図示しただけである．この形は log の曲線を反転したものに近い.

私はこのことを「理論と現実」ということでまとめておいた（参考文献3)).

5．具体例の見直しを

級数 $\Sigma\frac{1}{n}$ については，積み木問題と対応づけることができた．これなら問題を解いていても楽しくなる．数学は進めば進むほど，現実から遠ざかっていく．数式の世界に閉じこもると，そのことはあまり気にならなくなる．でも，ときどき自分を見失いそうになる.

そのようなとき，忘れてはならないのは，現実との対応であろう．このように，努力すれば素晴らしい具体例や説明が見つかるかもしれない.

級数 $\Sigma\frac{1}{n^2}$ についても何かよい例題と結びつけることができないだろうか．また機会があれば調べてみることにする.

先日，実験に木工店で材料を買い積み木をつくり，ゼミ生にやらせてみた．「どんな積み方でもいいのですね」と言うので，「そうだよ」と答えると次のような積み方もあった．これも一応正解ということにしておこう（図10)．答えは用意していたように必らず一つとは限らないことを知らされた.

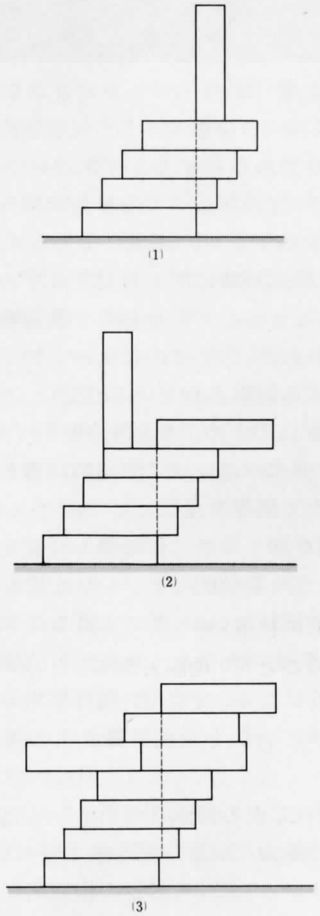

図10　パズル風別解

参考文献

1）ガモフ，スターン著，由良統吉訳『数は魔術師』白揚社

2）赤　攝也「ある積み木」『数学セミナー』1979. 7

3）西山　豊「理論と現実—積み木問題に寄せて」『数学セミナー』1979. 9

（にしやま　ゆたか）