メビウスの帯

西山　豊（大阪経済大学）

1．メビウスの帯を切る

「今日は，メビウスの帯について話しをしよう」

例によって，短冊状に切った細長い紙切れと，ノリとはさみをゼミ生に渡す．私のゼミの時間は本の読み合わせをしないので，数学の時間か図画工作の時間か区別がつかない．

「君たちは，メビウスの帯について知っているかい」

「知っています」

と答える者が文科系学生の中にもちらほらいる．

「帯を半分ねじって，つないだものでしょう」

「そうそう，それだ」

「さて，そのメビウスの帯についてクイズを出していこう」

ゼミ生は，何を始めるのかと期待する．

「普通の帯は，単純につないだものである（図1）．メビウスの帯は180°だけねじったのち，つないだものである（図2）．この2つの帯を切ると，どうなるであろうか．知らないものは，切る前に予想を立てよう．知っているものは，黙っているように．そして，結果がなぜそうなるのかを考えてみよう」

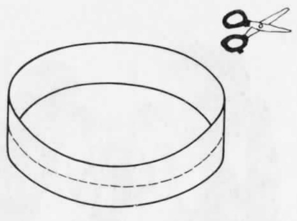


図1　普通の帯

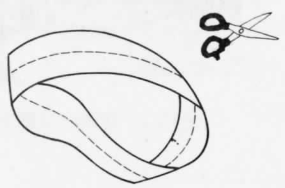


図2　メビウスの帯（180°ねじれ）

普通の帯は2つに切り離される．メビウスの帯は切り離されずに，つながった長い帯になる．初めて見るものは驚ろく．

「どうだ，面白いだろう」

「ええ，知りませんでした」

この違いはどこからくるのであろうか．それを知るために，メビウスの帯に鉛筆を走らせてみるとよい．ゼミ生に実際にやらせる．一周すると裏側の位置に来て，もう一周すると元の位置に戻って来る．位相幾何学（トポロジー）では，このことを表裏の区別のつかない曲面（単側面）と呼んでいる．

「先生，今できたこの帯（図3）をもう一度切るとどうなるでしょうか」

「そうだね，それは考えてみなかった．じゃあ一度やってみよう．だけど切る前に，予想を立ててみるのも面白いね」

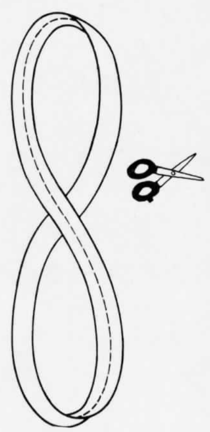


図3　360°ねじれ

1つの細長い帯になる，2つの帯になる等の意見がでる．

「結果はどうなるかな．さあ，切ってみよう」

ここまでくれば，ほっておけばよい．ゼミ生は必死に作業を始める．はさみのない者は，手で切ったりする．答えが早く知りたいのだ．

「あれ，予想と違うぞ」

「どうなったかね」

「2つの帯がねじれて，絡みあってつながっています」

「どうして，そうなったのだろう．先ほどと同じように，1つの帯にならないのだろうか」

「わかりません」

「じゃあ，もう一度，メビウスの帯から始めてねじれの度合いについて詳しく見てみよう」

「メビウスの帯は180°（半回転）ねじったものである．メビウスの帯を切ってできた1つの帯は360°（1回転）ねじったものである．だから，切ると違ったものになるのだ」

「なるほど，なるほど」

「また，この帯に鉛筆を走らせてみると，裏側にいかずに一周で戻って来る．このあたりの予備調査をしておけば，だいたいの予想はつくはずだったのだ」

「ということは，帯のねじれ度合いが，切った結果に大きく関連しているということですね．ねじれが180°の奇数倍なら鉛筆を走らせると裏側に行くことができて切ると1つの帯になり，偶数倍なら裏側に行けず切ると2つに分かれますね」

「その通りだ」

……………………………………………………

「それでは，もうひとつやってみよう」

「メビウスの帯を一つ作りなさい．そして，今度はメビウスの帯を3等分してみよう（図4）．結果がどうなるか予想を立ててみよう」

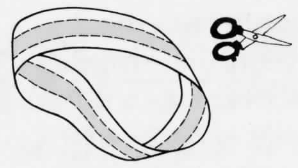


図4　3等分

この場合も，鉛筆を走らせてみると予想が立てやすい．しばらくして，予想を聞いてみる．またその理由も聞いてみる．

予想として，1本の長い帯になる，3本の短い帯になる，2本の同じ長さの帯になる，1本の長い帯と1本の短い帯になる等．また，これらの帯のつながり状態についても意見が分かれる．バラバラになる，リンクする，ねじれ度がさらに増す等．もちろん，この中に正解もある．それは，このパズルを知っている者だ．

以前，NHKテレビの『クイズ面白ゼミナール』という番組で，司会の鈴木アナウンサーが，「これは小学生の理科の問題です」と得意げに紹介されていた．私はこの番組で，メビウスの帯に，これだけバラエティがあるのを初めて知った．

正解は，図5に示すように1本の長い帯と1本の短い帯がリンクされている．リンクされた状態が意外と愛嬌がある．これも，鉛筆による下調べでだいたいの予想がつく．3等分の周辺の2本がつながって1本の長い帯になり，真中の1本が短い帯になる．

でも，どうして離れずに，リンクされるのだろうか．また，考えてみよう．どうも，ねじれ度合いが関係しているらしい．

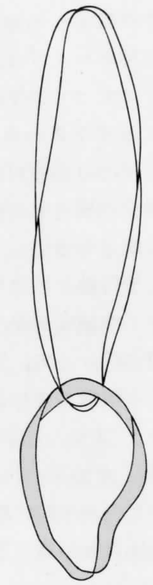


図5

2．地の果てと空の果て

「ところで，メビウスって，この言葉の由来は知っているかい」

「知りません」

メビウスの帯を知っていても，メビウスについては意外と知られていないのだ．

「メビウスとは人の名前でね（A.F. mōbius, 1790〜1868），19世紀に活躍したドイツの数学者であり天文学者であったのだ．メビウスの帯は，彼が提唱したものであるので，その名がついているのだ」

では，なぜこのようなものを考えだしたのだろうか．それは，天文学者でもあるので，宇宙の構造に興味があり，宇宙の果てはどうなっているのかといろいろ思いをめぐらしているうちに考案したものとされている．そして，宇宙の果てが論じられる時にいつも話題にされるのがメビウスの帯だ．

少し時代が逆のぼるが，昔の人は，大地は平面だと思っていた．実際，現在でもそうだが，人間は平面の上に住んでいる．そして，誰も行ったことのない地の果てには崖縁があって墜落すると思っていた．

地球が丸い事を証明したのは，コロンブスである．彼は1492年，新大陸を発見した．インドの一角に到達したと確信して，実際に着いたのはバハマ諸島であったが，地の果てがなかったことの発見は勇気あることで，かつ偉大なものであった．

その後，マゼラン（1480〜1521）が，最初の世界周航をし，これによって地球は球形であることや，日付に1日の差の生ずることを実証した．

幾何学においてもこの衝撃は大きい．今まで，幾何学といえばユークリッド幾何学が集大成され，これですべてが完結されているかに思われた．

メビウスとほぼ同世代人に，ロバチェフスキー(1792～1856)がいる．彼は，ロシアの数学者で平行線論の研究をつづけるうち，非ユークリッド幾何学の成立を確信し，その成果を発表した．

平行線の公理を否定することによって非ユークリッド幾何学が誕生する．この幾何学では，平行線公理に代わって，[平面上で，直線外の1点を通って，この直線と交わらない直線は少なくとも二つ存在する]，また，[三角形の内角の和は2直角より大となる]，さらに，[直線は有限で閉じたものとなり，直線上の点の間の順序についてもユークリッド幾何学の場合と相違する性質がみられる] 等がある．

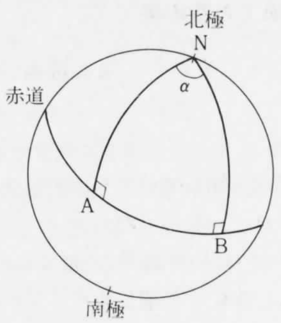


図6　三角形の内角の和は2直角より大きい

たとえば，北極と赤道下の2点を結ぶ三角形NABを考えてみる（図6）．この場合は，内角の和は2直角より大きくなる．ノートの上なら三角形の内角の和は2直角であるが，地球レベルの三角形ではユークリッド幾何学は成り立たない．非ユークリッド幾何学の中に局所的にユークリッド幾何学が成り立つ関係になっている．

地球が球形であることを，コロンブスやマゼランが実証すると，地の果てに対する誤解がなくなった．一方，空の果てはどうなっているのかという太古からの疑問が残る．宇宙は広く，人類はその果てまでは行けず，究めることができない．

地球と同じく，宇宙は閉じているという説がある．今まで光は直進すると考えられてきたが，これを否定することによって宇宙を解明しようとしたのはアインシュタイン（1879～1955）である．

彼は，慣性系における光速度不変と相対性原理に基づく特殊相対性理論によって，ニュートン力学における絶対空間，絶対時間，エーテルなどの概念を捨て，新たな4次元世界像を打ち立てた．質量とエネルギーの同等性は，この理論から導かれた．さらに相対性理論を重力場に拡張する試みは1907年から始められ1915年一般相対性理論として完成した．

光は重力によりまがるのだ．地球から宇宙へ放たれた光は，重力場の影響をうけいつかは戻って来る．したがって，宇宙に果てがあるのではなく閉じているという説明が成り立つのだ．

空間は3次元座標として与えられ，それに時間の軸を加えたものが4次元座標である．地球レベルでは3次元座標で十分であるが，宇宙レベルでは4次元座標が必要になってくる．数年前，話題になった『ブラック・ホール』は，光速よりはやく飛び去る星のことで，地球に光が届く前に遠ざかっていくために，その星は永遠に見えないのである．

宇宙の果てを理解するには，ユークリッド幾何学やニュートン力学だけでは駄目で，非ユークリッド幾何学やアインシュタインの相対性理論が必要になってくる．

3．2次元から3次元への掛け橋

尺とり虫やアリは，直線運動しかできない．つまり，1次元動物である．池に浮かぶミズスマシは，その表面を泳ぐだけで平面運動しかできない．つまり，2次元動物である．ヒトは空間に存在する3次元動物である．光の速度を有限のものと感じ宇宙構造を把握できるのは，4次元動物の宇宙人だけである．これを，まとめると次のようになる．

1次元	直線	…	尺とり虫，アリ
2次元	平面	…	ミズスマシ
3次元	空間	…	ヒト
4次元	空間＋時間	…	宇宙人

ここで，各次元に住む動物は自分より下位の次元については理解できるが，上位の次元については理解できないのである．たとえば，ヒトは3次元動物であるので，1次元動物のアリや2次元動物のミズスマシについては理解できるが，4次元の世界は想像できない．1次元動物のアリが平面や空間を，ミズスマシが空間を理解できないのと同じ関係である．

3次元の世界で，4次元の座標系をどのように表現すべきかについて，いろいろ案がでているなかで，メビウスの帯がよく引き合いに出される．2次元の世界（平面）に住んでいても，メビウスの帯に乗ればこの平面の裏側に行けるのである．表裏の関係は，平面を超えた概念であるとするならば，メビウスの帯は2次元から，疑似3次元への掛け橋となるのだ．

このような装置が工夫されるなら，3次元から4次元の世界への橋渡しがあるのではという期待がこめられるのである．そして，現在も4次元座標については議論がつづけられている．

4．フラクタル次元

今までは，4次元世界はどのようになっているのかという議論が中心であったが，最近の話題として，次元は1，2，3，4等と整数ではなく，この間の1.5次元や2.3次元という実数のものも存在するという議論が盛んである．

B.マンデルブロは，海岸線の研究をするなかで海岸道路は，直線であるが，分解能によって，直線（1次元）に近いときと，平面（2次元）に近いときがあることに言及し，フラクタル次元を提唱した．いままでのコッホ曲線の理論をさらに進めたものであり，その理論をさまざまなコンピュータ・グラフィックとして表現している．

彼は，「糸のボールに内在するいろいろな実効次元」のところで次の様に述べている（参考文献2）．

直径1 mmの太い糸でできた直径10 cmのボールにはいくつかの異なる実効次元が存在しているのである．うんと遠くから眺めた場合，このボールは0次元の像，すなわち点に見える．10 cmの距離から見た場合，ボールは3次元の像になる．10 mmの距離では，1次元の混乱である．0.1 mmまで近づくと，糸の1本1本は柱のようになり，全体が再び，3次元の像になる．0.01 mmでは，糸の柱は繊維となり，ボールは再び1次元の像に戻る．同様にして次元の値が繰り返し交差していく．ボールが有限の原子のように小さな点で表わされるときには，再び0次元が現われる．

この光景は，『パワーズ・オブ・テン』という10分足らずの映画がよく表現してくれる（参考文献3））．タイトルは10のベキ乗という意味だが，宇宙から人間をへて素粒子に至るまでを動的視覚像として表現されている．私も以前に見たことがあるが，

非常にインパクトが強く，今でも鮮明に記憶している．何百冊の書物より，10分足らずの映像が訴える力の方がはるかに大きいのだ．もし機会があるなら，是非とも見て欲しい．

マンデルブロはフラクタル次元を提唱しフラクタル幾何学へと発展させた．詳細を述べないが，最近のブームになっていることだけを言っておこう．マンデルブロの「次元の認識」に対する新しい提案は，私たちをわくわくさせてくれる．今後の研究に期待したい．

5．エンドレステープ

メビウスの帯は，宇宙の構造を解明する1つの手段として提案されたが，学問とは別に，その素晴らしい幾何学的な性質が，私たちの生活に実用化されている．それについて紹介しよう（参考文献1)）．

1923年にリー・デ・フォレストは，音を「両側」に録音するメビウスの帯に対して，特許番号1442632を得た．後に同じ考えをテープレコーダーに応用して，ねじったテープが，そうでないときの2倍の長さだけ動けるようにした案が出ている．

これは今日の，エンドレステープへの応用である．カセットテープはA面とB面があり，各面が終わればカセットを裏返すかテープを巻き戻さなければならない．この操作によるアイドリング・タイムを無くす方法は，テープをメビウスの帯のように180度ねじってつないでおけばよいのである．

このアイデアは，コンピュータのプリンターのインク・リボンにも応用されている．

また，両側を同じだけ使われるように設計されたメビウスの帯型のベルトコンベアーに対して，いくつかの特許が与えられている．1949年にO.H.ハリスは，メビウスの帯型の研摩ベルトに対して特許番号2479929を得た．B.F.グッドリッチ会社は，1957年に同様の特許番号2784834を得た．1963年にJ.W.ジャコブスは，ドライクリーニング用機械の自動清浄フィルターベルトに，特許番号3302795を得た．それは，ねじれたベルトが回ると両側から容易に汚れを洗い去ることができる．

これらは，ベルトの片摩耗を避け，なおかつベルトの両面を有効に使おうというのである．

6．あっと驚く！

メビウスの帯で十分遊んだ後，最後に次のパズルを出す．

「普通の帯を2つ用意します．しっかりノリづけしておき，これらをひっつけます（図7）．さてこれを，点線に沿ってはさみで切ればどうなるでしょうか」

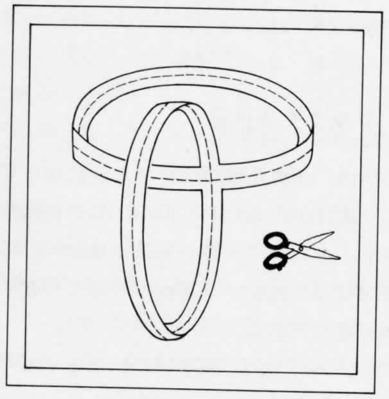


図7　2つの輪をつなぐ

これも，予想をさせると面白い．今までの結果がすべて曲面であったので，予想もねじまがったものが多い．予想を聞いたあと，代表に切らせてみる．驚くなかれ，大きな正方形の額縁ができるのだ（図7の外枠）．円から正方形ができること，3次元物体が2次元平面になることの意外性が見せ物だ．

こんなとき，「あっと驚く～為五郎～」なんていってもゼミ生には受けない．でも，先日，大阪市教育委員会主催の大学市民講座で言ってみたところ馬鹿受けした．笑いにも世代とTPOがあるのだと，あらためて反省させられた．

参考文献

1)　M.ガードナー著，一松信訳『続数学魔法館』東京図書，1979．6

2)　B.マンデルブロ著，広中平祐監訳『フラクタル幾何学』日経サイエンス，1985．1

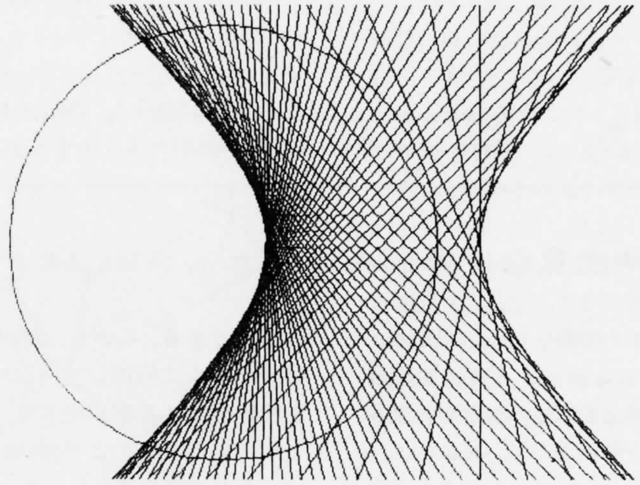
3)　フィリップ・モリソン他編著，村上陽一郎他訳『POWERS OF TEN』日経サイエンス，1983.10

（にしやま　ゆたか）

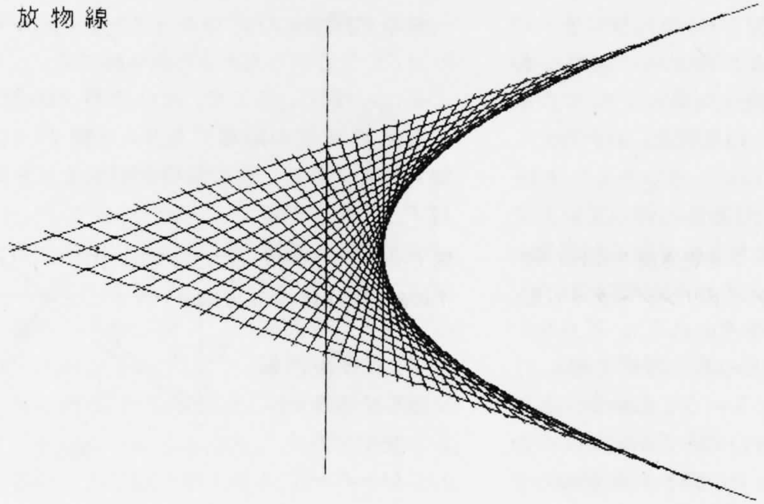
『放物線と双曲線を描く』

内田　淳美（無職）

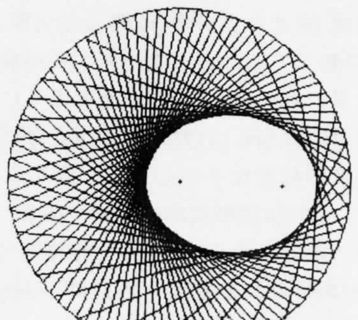
双曲線



放物線



楕円



「パソコンで遊ぶ数学」（木村良夫著，ブルーバックス）の中に、円の内部に1点を取り，その点と円周上の点を結ぶ線分の垂直2等分線を次々に引いて行くと，円の内部に楕円が浮かび上がって来ると言う話が出ていた．点を円の外に取ったり，また円を直線に置き換えたらどうなるか，プログラムを一部変更して私のパソコンに描かせて見たところ，図の様に双曲線と放物線が綺麗に浮かび上がって来た。

ただ上記の本に出ている楕円の場合は垂直2等分線の両端が自動的に決まるが，この場合はこちらで設定してやらなければならない。

（〒281　千葉市朝日ケ丘町3233-10　☎0472-71-8534）