凸結合という．勿論，$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_i)$ のベクトルであり，ベクトル $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_i+y_i)$ なるベクトルとする． ■

凸多面集合：いくつかの半空間及び超平面の共通集合として定義される集合，すなわち，代数的には，線形不等式及び線形等式をみたす $\boldsymbol{x}$ の集合で，$\{\boldsymbol{x}|\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_j\leqq d_i,\ i\in I_1,\ \sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_j=d_i,\ i\in I_2\}$ とかける．特に，有界な凸多面集合を凸多面体という． ■

超平面，半空間，凸多面体は凸集合である．すなわち凸集合は，二点が入っていれば，その二点を結ぶ線分も入っている集合で，凸というイメージの通り，へこまずに膨らんでいる集合である．ヘモグロビンの様に真中がへっこんでいるものは凸集合ではない．

既に気が付かれていると思うが，線形計画問題は，幾何的にはその条件式が凸多面集合となり，凸多面集合上で $\sum_{j=1}^{n}c_jx_j=z$ という超平面を最大化問題では，z が一番大きくなる位置にもっていく問題である（少なくとも単体法では）．これは，高校で習う，1次式のもとでの最大，最小の方法そのものである．しかし，高校で習ったとき，最適解はあると，いつも端でなっていたでしょう．これは単体法を用いるとき，いつも言える事であり，このIIの終りと線形計画法（III）のはじめにかけて示そう．又，うっとうしいが，定義をもう少ししよう．

凸集合 S の端点：$\boldsymbol{x}\in S$ が S の端点であるとは，適当な相異なる S の2点 $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2$ と $0<\lambda<1$ を用いて

$$\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2$$

と表わせない時を言う．この方がわかりやすいと思うので，別の言い方をすれば，

$$\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2,\ \boldsymbol{x}^1\in S,\ \boldsymbol{x}^2\in S,\ 0<\lambda<1$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{x}^1=\boldsymbol{x}^2=\boldsymbol{x}$$

となる場合である． ■

標準形の線形計画問題

$\boldsymbol{P'}$：$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}\rightarrow$ 最大

条件　$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{0}$

を考える．

［定理5］ P' の実行可能基底解は，P' の条件式が作る凸多面集合の端点である．

（証明） 今，実行可能基底解を $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}'_B, \boldsymbol{x}'_N)'$ とし，対応する A の分解を $A=[B, N]$ とする．すなわち，一般性を失う事なく，$\det B\neq 0$ として，$\boldsymbol{x}_B=B^{-1}\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{0}$ とする．勿論，実行可能性より，$B^{-1}\boldsymbol{b}\geqq\boldsymbol{0}$ となっている．もし，$\boldsymbol{x}$ が端点でないとすると，ある実行可能解 $\bar{\boldsymbol{x}}$，$\bar{\bar{\boldsymbol{x}}}$（$\bar{\boldsymbol{x}}\neq\bar{\bar{\boldsymbol{x}}}$）と $0<\lambda<1$ が存在して，$\boldsymbol{x}=\lambda\bar{\boldsymbol{x}}+(1-\lambda)\bar{\bar{\boldsymbol{x}}}$ とかける．$\bar{\boldsymbol{x}}$，$\bar{\bar{\boldsymbol{x}}}$ も $\boldsymbol{x}$ に対応して $\bar{\boldsymbol{x}}=(\bar{\boldsymbol{x}}'_B, \bar{\boldsymbol{x}}'_N)'$，$\bar{\bar{\boldsymbol{x}}}=(\bar{\bar{\boldsymbol{x}}}'_B, \bar{\bar{\boldsymbol{x}}}'_N)'$ とかく．この時，$\boldsymbol{x}_N=\lambda\bar{\boldsymbol{x}}_N+(1-\lambda)\bar{\bar{\boldsymbol{x}}}_N$ となり，$\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{0}$，$\bar{\boldsymbol{x}}_N\geqq\boldsymbol{0}$，$\bar{\bar{\boldsymbol{x}}}_N\geqq\boldsymbol{0}$，$0<\lambda<1$ より，$\bar{\boldsymbol{x}}_N=\bar{\bar{\boldsymbol{x}}}_N=\boldsymbol{0}$ でなければならない．この事から，$B\bar{\boldsymbol{x}}_B=B\bar{\bar{\boldsymbol{x}}}_B=\boldsymbol{b}$，すなわち，$\bar{\boldsymbol{x}}_B=\bar{\bar{\boldsymbol{x}}}_B=B^{-1}\boldsymbol{b}$ となるので，$\bar{\boldsymbol{x}}=\bar{\bar{\boldsymbol{x}}}$ となり $\bar{\boldsymbol{x}}\neq\bar{\bar{\boldsymbol{x}}}$ に矛盾 ■

以下は線形計画法（III）のお楽しみとして，毎来月！

（参考文献）（順不同）

[KO]　線形計画法，今野浩著，日科技連，1987年

[IS]　石井博昭，楽しく学べる OR 教室—No. 3，線形計画法（I），Basic 数学第24巻4号，1991年

[BL]　*R.G. Bland*, "New Finite Pivoting Rules for the Simplex Method", *Mathematics of Operations Research, Vol. 2* (1977), pp 103-107.

（いしい　ひろあき）

1991.5「BASIC 数学」現代数学社刊

不動点の作図

西山　豊（大阪経済大学）

1．自画自讃の定理

数学を志す者，一生に一つぐらいは定理を発見したいものである．これから紹介する定理は，私が発見した唯一自慢できる不動点に関する作図の定理である．定理と呼ばれるかどうかは疑わしいが，結構エレガントだし気にいっている．

合同な正方形の用紙を2枚，任意に重ねる（図1）．重なりによってできた各辺の交点を結び2本の補助線を引く．補助線の交点をコンパスの針で押さえると2枚の正方形は完全に重ね合わせることができる．つまり，この作図によってできた交点が合同変換における不動点になっている（参考文献1））．

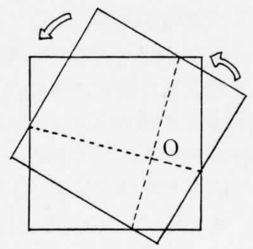


図1　不動点

この不動点の作図法は，正方形を例にとったが長方形でも同じである．正方形の用紙は子供の折り紙に代表されるが，私達に身近かな長方形のレポート用紙で試されるとよい．

一般に合同な図形は，平行移動と回転移動，または対称移動を組み合わせることによって重ね合わされる（図2）．このことを合同変換という．ところが平行移動と回転移動の2つの操作による移動は，1つの回転移動におきかえられる．物理で習う剛体の移動を思い出せばよい．回転の中心は，移動した線分の垂直二等分線の交点となっている（図3）．この場合の作図方法はコンパスと定規が必要である．先に示した私の作図方法はコンパスを使わないところがミソで，図形の性質を応用している．

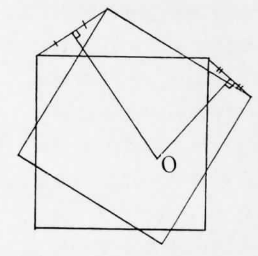


図3　垂直二等分線による作図

私がこの作図方法を見つけたのはランダム・ドット・パターンによってである（図4）．正方形の内部にランダムな点群を約2000個プロットする．これを透明な OHP 用紙に焼きつけて重ねて用いるのである．これを用いると，回転の中心すなわち不動点を目で確かめられるという特典がある（図5）．

ランダム・ドットによる不動点の表れかたが非常に美しいので，これをおもちゃにできないかと思い，朝日新聞社主催の「第3回朝日創作おもちゃコンクール」(1987年9月) に応募したところ，応募総数2571

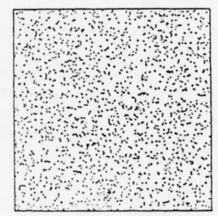


図4　ランダム・ドット・パターン

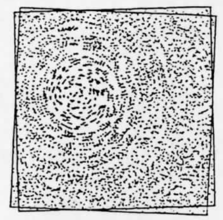
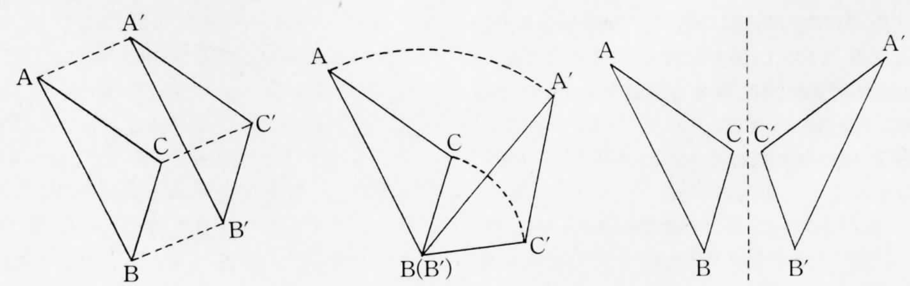


図5　不動点が見える



(1)　平行移動　(2)　回転移動　(3)　対称移動

図2　図形の移動

名中ベスト30に選ばれ，審査員特別賞をいただいた．これに気をよくした私は，商品化すれば絶対に売れると思い，実用新案特許の手続きをした．しかし，いまのところ何の返事もない．私の独りよがりのような気がする．やはり，これは高尚なおもちゃなのだろうか．

2．証明の概略

図1において補助線の交点がなぜ不動点になっているのか説明しておこう．証明のために，図6のように記号をつけておく．下の正方形をABCD，上の正方形をA′B′C′D′とし，各辺の交点をP，Q，R，Sとし，直線PRと直線QSの交点をOとする．

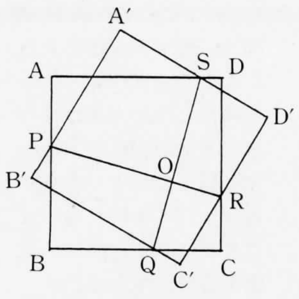


図6

いきなり証明するのは難しいので，段階をおって説明していこう．まず，

『2つの直線を重ね合わせるためには，回転の中心を，交角の2等分線上にもってこなければならない』ことを証明しよう．

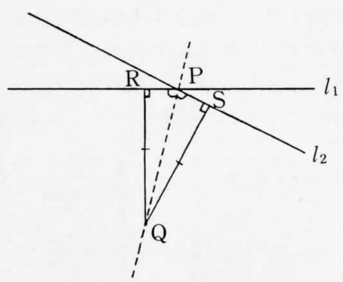


図7　直線を重ねる

交わる2本の直線をl_1，l_2，交点をPとする（図7）．Pを通り交角の2等分線上の任意の点Qから，直線l_1, l_2に垂線を下し，その足をR，Sとする．QPが共通で等しく，∠QPR＝∠QPSより，三角形QPRと三角形QPSは合同な直角三角形となる．したがって，QRとQSの長さは等しくなる．これで，Qを中心に回転すれば直線l_1と直線l_2は重ね合わされることになる．つぎに，

『平行線を重ね合わせるための条件』

を考えてみよう．

平行な2直線l_1, l_2に，これと距離の等しい平行な2直線l_3，l_4が交わっているとし，それらの交点をE，F，G，Hとする（図8）．直線l_1を直線l_3に重ね合わせるためには，回転の中心を交角Eの2等分

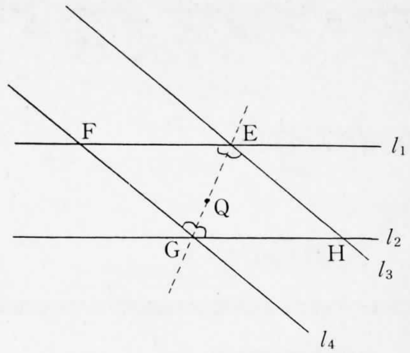


図8　平行な2直線を重ねる

線上にもってこなければならないし，直線l_2を直線l_4に重ね合わせるには，回転の中心を交角Gの2等分線上にもってこなければならない．

4直線で囲まれた平行四辺形EFGHは，辺の長さが等しく菱形になっていて，交角Eの2等分線と交角Gの2等分線は一致している．したがって，直線EG上の任意の点Qを回転の中心にするならば，直線l_1を直線l_3に，直線l_2を直線l_4に同時に重ね合わせることができるのである．

以上の準備をもとに図6を眺めてみよう．

辺AB，DCを直線l_1，l_2に，辺A′B′，D′C′を直線l_3，l_4に対応づける．各線分を延長すれば菱形ができ直線PRは角A′PBと角DRC′を各々2等分している．したがって直線PR上に回転の中心をもってくるならば，辺A′B′を辺ABに，辺D′C′を辺DCに重ね合わせることができる．

同様にして，直線QS上に回転の中心をもってくるならば，辺B′C′を辺BCに，辺A′D′を辺ADに重ね合わせることができる．

4辺は同時に重ならなければならないから，直線PRと直線QSの交点Oが唯一の中心になるのである．

3．円の場合の不動点

2つの合同な円が重なっている（図9）．この場合

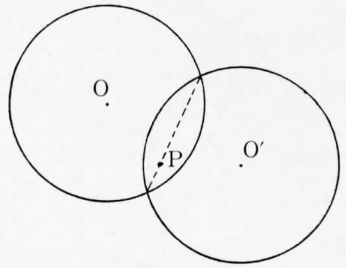


図9　円を重ねる

の不動点は，2円の交線上にある．しかも，この交線上ならどこでも重なるということで，「いたるところ不動点」ということになる．各自確かめて欲しい（参考文献2））．

正方形は4辺が等しく，重ね方によっては4通りの方法がある．したがって4個の不動点があることになる．一般に正n多角形は，n辺が等しく重ね方がn通りあり，n個の不動点がある．これらの不動点は一直線上に並ぶことが分っている．

正方形に外接する円を描いてみると，これらの関係がよくわかる（図10）．円は正n多角形のnを無限大にした時の図形であるので，不動点は無限にあることになる．

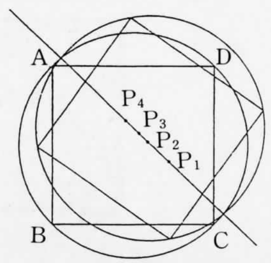


図10　不動点は外接円の交線上に並ぶ

4．合同変換と相似変換

私は，以上の作図方法を，私が発見したものとばかり思っていた．ところが，最近ある文献を読んでそうでないことを知り，少々がっかりしている．それは，アメリカの数学オリンピックの問題として1978年5月に出題されていたのである（参考文献3））．

ABCD，A′B′C′D′は，ある地域の縮尺の異なる正方形の地図で，図11のように，1つの地図の上に他の地図が置かれている．このとき，その地域の同じ場所を表す小さな地図上の点Oと，大きな地図上の点O′で，O′上にOが重なっているものは，ただ1つだけであることを示せ．また，ユークリッドの作図法により，その点Oを求めよ，というものである．

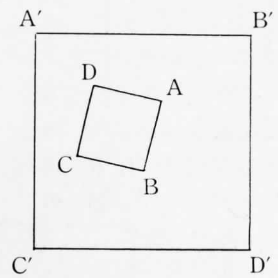


図11　相似変換の不動点

これは相似変換の作図例である．解答例にはコンパスと定規を使ったオーソドックスなものと，別解として直線だけを使うものの2つが紹介されていた．この別解の方が私の作図法と類似していたのだ．

合同変換より相似変換のほうが高度だし，出題された年代が，私が考えた時よりずっと前である．だから私の出る幕はない．でも，私はこの出題を知らなかったし，独自で解いたのだから発見には間違いなく，許していただこう．

相似変換はH.S.M.コクセターの文献に詳しく述べられている（参考文献4），5））．その例として，「拡大相似」には，写真の引伸し機やパンタグラフ（縮図器）が，「らせん相似」には，縮尺の違う地図があげられている．

1万分の1の地図の上に，小さな2万分の1の地図をはみださないように乗せる．そしてその上に4万分の1の地図を同じ位置関係で乗せる．このようにして，この操作を無限に繰り返せば，この極限が不動点になるというのである（図12）．

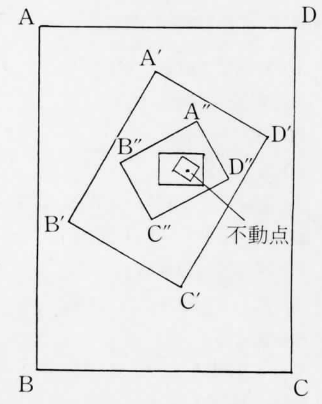


図12　らせん相似

これは，『任意の連続写像は，すくなくとも1つの不動点が存在する』というブラウワーの不動点定理の特別な場合である．

おそらく，コクセターは，不動点の説明に「らせん相似」を用いざるを得なかったのではと推察する．同じ相似の関係で図形を作成していけばその図形に不動点に収束するというように．

私の場合は，そのような手続きを経ずとも，合同変換のままで不動点を一気に見せることができるのである．それは，ランダム・ドットの手法を用いてである．この手法は今日のコンピュータ技術の発達のお陰である．だから，今までの理論を継承し発展させたと見て欲しい．

尚，不動点に関しては岡部恒治氏の文献に詳しい（参考文献6））．

5．ランダム・ドット・パターンの作成方法

最近はパソコンがかなり普及しているので，プログラムを作ればランダム・ドット・パターンを簡単に手にすることができる．ここでは，BASIC言語を用いたプログラムによる作成方法を説明しよう．

乱数を発生させるためには，組込み関数RNDを用いる．RNDは，(0,1)区間の一様乱数を自動的に計算してくれる．正方形の大きさを適当に決め，乱数を掛け合わせれば(x, y)座標が求まる．この場合は，正方形のサイズがWX＝700，WY＝700で，X，Yに座標が求まる．

ドットを描かせるには，少し大きめの点がよいの

で，円を描く CIRCLE を用い，半径を0.5ドットとした．点群の数は2000個とした．

不必要な文字などを消して画面を美しくするため，キーの説明を消去したり (KEY OFF)，画面消去したり (CLS : Clear Screen) しておいた．命令は全体でわずか12行である．

```
10 KEY OFF : CLS
20 WX=700
30 WY=700
40 SY=30
50 LINE(0,SY)-(WX,WY+SY),,B
60 FOR I=1 TO 2000
70 X=RND*WX
80 Y=RND*WY+SY
90 R=.5
100 CIRCLE(X,Y),R
110 NEXT I
120 END
```

表1．BASIC プログラム

以上のプログラムを RUN すれば，画面上にランダム・ドット・パターンが表示される．そこで，ハードコピーをとれば用紙に印刷される．印刷された用紙が，縦，横が等長な正方形になっていないなら，WX，WY を適当に微調整して修正するとよい．

できあがったパターンは，OHP 用のフィルムに焼きつける．OHP の機器がない場合は，コピーでよい．このようにしてランダム・ドット・パターン一式が作成されたことになる．各自確かめよ．

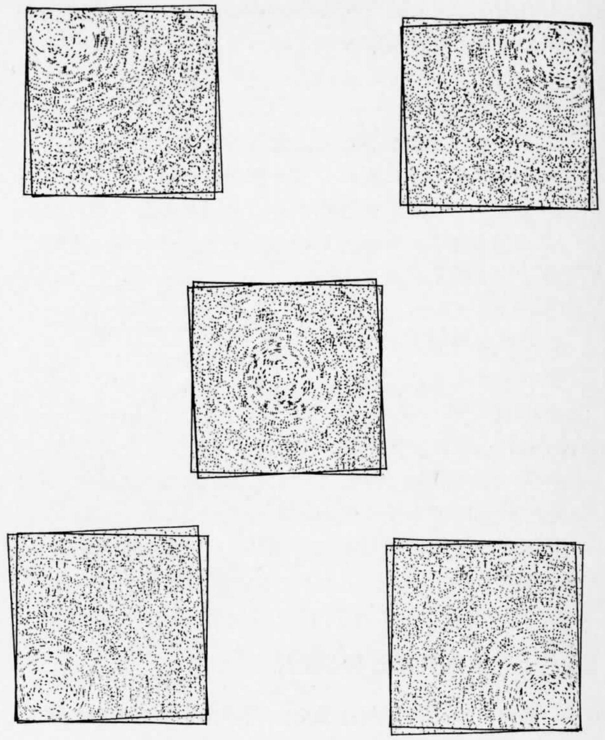


図13　不動点の移動

6．ランダム・ドットの魅力

ランダム・ドット・パターンは，不動点を見せる教材として非常にアピールするものであるが，これ以外に面白い遊びがあるのでそれを説明しよう．

パターンを重ね，OHP 用紙を少し回転させて同心円を真中に作る．OHP 用紙を左右に動かしてみると，同心円は上下に動く．OHP 用紙を上下に動かしてみると，同心円は左右に動く．パターンの移動方向と不動点の移動方向は，直交関係をなしているのである (図13，14)．この関係は，回っているコマの縁を指で触れてみると，力の向きとコマの動く向きが直交であることに似ている．

次に同心円の移動速度について説明しよう．パターンを操作しているとすぐに解ることであるが，OHP 用紙をほんの少し動かすだけで同心円は急激に移動する．OHP 用紙の移動速度に対する同心円の移動速度の比率は，数十倍にもなっている．このダイナミックな移動速度は，不動点を求めた時の作

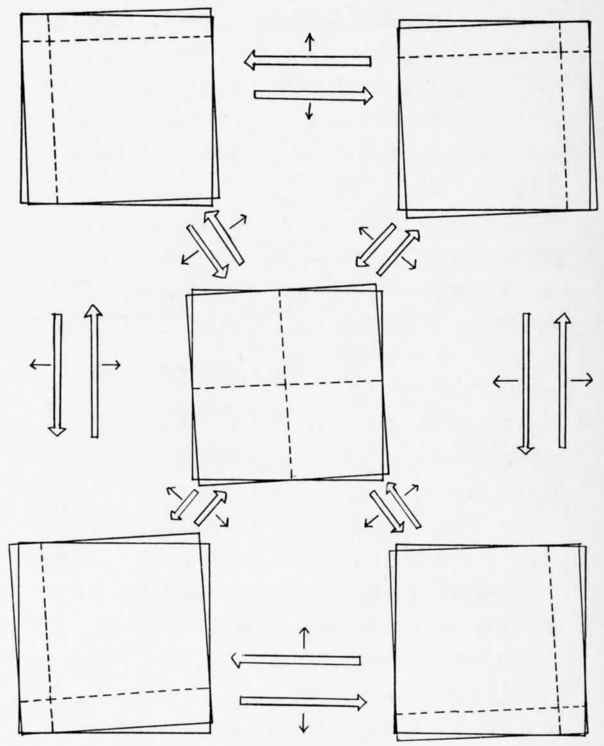


図14　パターンの移動と不動点の移動は直交する　⇐ パターンの移動　↑ 不動点の移動

図から理由が分かる．直線 AB と直線 A′B′ の交点 P が同心円の中心を決めているので，点 A が点 A′ に移動するのが OHP 用紙の移動距離である．したがって，直線 AB と直線 A′B′ の交角が小さいほど点 P の移動速度比は大きいことになる (図15)．

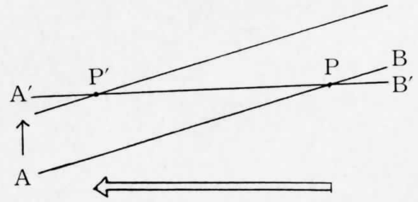


図15　移動速度比

図16　すずめ追い

この原理は，田んぼの「すずめ追い」の工夫に見られる．田んぼの四隅に棒が立てられてあり，そこに銀紙のテープがつないである (図16)．風が吹くとテープが揺れて銀紙がキラキラと輝き，すずめは逃げるのである．銀紙はねじれ方向に少ししか回転しないが，反射する光りは水平方向に大きく移動する．

参考文献

1）西山豊「折紙をそろえる」『卵はなぜ卵形か』日本評論社 1986．6
2）西山豊「円を重ねる」『サイエンスの香り』日本評論社 1991．2
3）M.S. クラムキン『数学オリンピック問題集 (アメリカ編)』東京図書 1990．7
4）H.S.M. コクセター，銀林浩訳『幾何学入門』明治図書 1965
5）H.S.M. コクセター，S.L. グライツァー，寺阪英孝訳『幾何学再入門』河出書房新社 1970.11
6）岡部恒治「不動点定理」『数セミ』1990．3

(にしやま　ゆたか)

(p. 71 からつづく)

$$=a\left\{1-(r+i)x+\binom{i}{2}x^2\right\}+(2r+i)x-\binom{r+i}{2}x^2+\binom{i}{3}x^3$$

$$i=1,2,\cdots,r \qquad (23)$$

となります．

A．シムプソンの公式は一見複雑そうにみえますが，結局はド・モワブルの考え方の延長線上にあるのですね．

B．そうです．シムプソンの解法は再帰式(16)が基になっています．

A．この前から気にかかっていたのですが，再帰法とか再帰式というのは差分法とか差分方程式とどう違うのですか．

B．同じです．フランス語の récurrente という言葉を昔，漸化と訳したようです．この récurrente が英語の recursion，recursive という単語に当ります．この単語が「はじめに戻る」とか「反復する」とかいう意味をもち，それで再帰と訳されたようです．例えば幾何数列

$$u_1=a,\ u_2=ar,\ u_3=ar^2,\ \cdots,\ u_n=ar^{n-1},\ \cdots$$

では，$u_{n+1}=ru_n$ ($n=1,2,\cdots,u_1=a$) を満足します．この方程式から分るように，後に続く項を求めようとしますと先行する項に戻って考えねばなりません．第 $n+1$ 項を求めたければ，第 n 項まで戻らねばなりません．第 n 項を求めたければ，第 $n-1$ 項まで戻らねばなりません．ですから，再帰方程式 $u_{n+1}=ru_n$ を解くには，元へ元へと戻っていき，その過程が逐次代入法という解法を暗黙のうちに示唆しています．そして得られた結果を逆順に見ますと，第1項からの各項が出てきます．帰納的という解釈もできます．

A．それで recursive function を帰納的関数などと訳したりするのですね．

B．そういう訳語が出てくるのはずっと後のことですが，ともかく再帰法を盛んに使ったのはド・モワブルであり，さらにオイレルです．有名なオイレルの『無限小解析序説』の中の1章は再帰級数に割かれています．　(あんどう　ひろみ)