つ確率は

$$1-\bar{p}(x,y)=\frac{2697-10x+(16x-6)y}{5525} \tag{10}$$

となります．もしもAが $x\geqq x_0=3/8$ の任意の確率の値を固定しますと，(10)式の $16x-6\geqq 0$ ですから，B は $y=1$ をとれば(10)式は最大になります．そのとき $\bar{p}(x,y)$ は最小になります．またもしも A が $x<x_0=3/8$ の任意の確率の値を固定しますと，(10)式の $16x-6<0$ ですから，B は $y=0$ をとれば(10)式は最大になります．それで $\bar{p}(x,y)$ はやはり最小になります．

$$\min_y \bar{p}(x,y)=\begin{cases}(2828+10x)/5525, & 0\leqq x<3/8 \text{ の時}\\ (2834-6x)/5525, & x\geqq 3/8 \text{ の時}\end{cases} \tag{11}$$

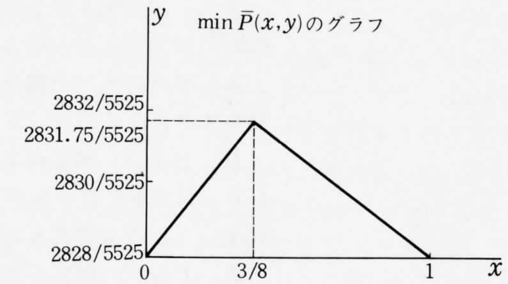
(11)式の最大値は $x=3/8$ で取ることは（図５）をみれば分ります．ですから，$x_0=3/8$ とおきますと

$$\bar{p}(x_0,y)=\max_x \min_y \bar{p}(x,y) \tag{12}$$

です．同様に，y の最適値も

$$y_0=\frac{a_{12}-a_{22}}{a_{21}-a_{22}+a_{12}-a_{11}}=\frac{5}{8} \tag{13}$$

に等しく，$\bar{p}(x_0,y)=\bar{p}(x,y_0)$ となります．上と同じ推理で



（図５）

$$\bar{p}(x,y_0)=\min_y \max_x \bar{p}(x,y) \tag{14}$$

です．ですから

$$\min_y \max_x \bar{p}(x,y)=\max_x \min_y \bar{p}(x,y) \tag{15}$$

となります．

A．成程，$x_0=3/8$，$y_0=5/8$ なる確率で，A と B が戦術 C をとれば，それで最適戦術となるわけですね．**混合戦術**（mixed strategy）を用いる２行２列の清算行列で表されるゲームのミニマックス解を求めたのは，歴史的にはウォルデグレイヴ伯爵が初めてだったのですね．

B．それでエールの問題は**ウォルデグレイヴの問題**と呼ばれるようになりました．トドハンターは『確率論史』で，この問題の解法を理解することはできませんでした．フォン・ノイマンのゲーム理論が出る迄，215年間ウォルデグレイヴの功績は眠っていました．1934年 **R.A. フィッシャー**はトドハンターの本の不十分な説明を改良し，『**無作為化とカード・ゲームの古い謎**(*Randomisation and an old enigma of card play*)』(Math. Gazette, 18巻) でノイマンと独立にミニマックス解を見つけました．しかしウォルデグレイヴの功績には触れていません．

（あんどう　ひろみ）

数のサバイバル３８１６５４７２９

西山　豊（大阪経済大学）

１．数学と生物の関係

すべての多細胞生物は１個の卵子と１個の精子によって発生する．この関係を数学に結びつけると意外と面白い．数学は問題があって，答えがある．問題を卵子に，挑戦する数学者を精子に，解が見つかったとき新しい生命の誕生ということにする．

普通は１つの問いに対して答えが１つであるが，答えが２つ出た場合は１卵性双生児ということになろうか．２つの関連問題に２つの解が同時に得られれば，これは２卵性双生児だ．

問題を出すのは女性とは限らない．解く方も男性とは限らない．男性が出して女性が解くということもある．また大人が出題し子供が解く，これは「数学オリンピック」だ．自分で出題し自分で答えを出すというのは，生物ではコケ・シダ類の自家受精になるのだろうか．

男が出して男が解く，これは□□□だ．ということは数学は□□□の世界であるのか．女と男がいれかわる面白いコメディ映画もあった．これ以上言及するとややこしくなるのでやめておこう．つまり，数学の世界では，出題と解答に老若男女の区別が無いということである．完全に平等な世界である．

３次方程式の一般解については，カルダノが解いたと言われているが，実際はタルターリアが最初に解き，カルダノに手紙を出し「絶対に秘密にして欲しい」と言っていたにもかかわらず，カルダノが公表してしまったのである．いわば，これは，認知の問題になるのだろうか．

５次方程式の一般解は存在しないことを証明した「ガロアの理論」は問題があっても，解答がない，つまりいくら努力しても不妊であることを証明したことになろうか．

フェルマーの問題はいまだに解かれていない．この問題は魅力ある問題で，いくら年月を掛けても新鮮さをたもち数学者を魅了する美女か妖精なのであろうか．

ヒルベルトのような大数学者は，いくつもの難問題を世の数学者に問うた．これは，排卵誘発剤に対応するというところだろうか．

問題が解かれて答えが出る．これで集大成がなされ子孫が繁栄しないのはギリシャのユークリッド幾何学であろうか．とすれば，ロバチェフスキーの非ユークリッド幾何学は突然変異か．

このように生命の誕生と数学の問題が解かれる過程を関連づけると話はいくらでもふくらむ．

前置きが長くなってしまった．夏目房之介によれば（『夏目房之介の講座』廣済堂），'60年代の特徴は走暗性で重厚長大（話が重苦しい，本がぶ厚い，前おきが長い，表現が大げさ）で，'80年代は走光性で軽薄短小（ノリが軽い，本が薄い，交渉が短い，リスクが小さい）であるらしい．ということは，私は'60年代に属することになるのだろうか．

２．サバイバル・ゲーム

三省堂で知り合った木村良夫先生に，次の様な問題を教えてもらった．原文のまま掲載しよう（参考文献1)）．別に意地悪をしようというのではない．難解な小説ではなく数学の著書であるので，数字に注目し数学が好きなら英語も自然と読めてくるというものだ．

[66 Divisibility]
Can you arrange the digits 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
in an order so that :
the number formed by the first two digits
is divisible by 2
the number formed by the first three digits
is divisible by 3
the number formed by the first four digits

is divisible by 4
and so on up to nine digits?
The order 1 2 3 6 5 4 9 8 7 looks promising as

1 2 is divisible by 2
1 2 3 is divisible by 3
1 2 3 6 is divisible by 4
1 2 3 6 5 is divisible by 5
1 2 3 6 5 4 is divisible by 6

Unfortunately 1 2 3 6 5 4 9 is not divisible by 7.
Back to the drawing board and try again!

つまり，Bolt, B 氏の出題した66番目の問題は，

「1から9までの数字を適当に並べかえて，
前から2桁目までは2で割りきれ，
前から3桁目までは3で割りきれ，
前から4桁目までは4で割りきれ，
…………………………
前から9桁目までは9で割りきれる
というような9桁の数字を見つけよ」という問題である．

読者には独自で解かれることを勧める．答えは表題に出てしまっているので仕方がないが，解に至るプロセスを考えられたい．

…………中断…………

私はこの問題を見て，発生学における卵子と精子の関係を連想した．1個の卵子に対して何十万という精子がアタックし，そのうちの1個の精子だけが受精に関係し，残りの精子はすべて死んでしまうのだ．

9!＝362880 個

の数がこの条件に満たされるように挑戦し，途中で討ち死にするか，最後までたどりつくか，たどりつくのがいないのか，たどりつくのが2個以上あるのか色々と興味がある．まさに「数のサバイバル・ゲーム」だ．

3．コンピュータか電卓か

私はコンピュータ屋なので FORTRAN のプログラムで見つけようかと思ったが，かれこれ20年もコンピュータと関係しながらコンピュータがなかなか好きになれない．コンピュータで解くのは邪道だと思い電卓でできないかと挑戦した．こういう問題は，答えが気になって仕方のない性分なので夜中の3時までかかってしまった．でも唯一の解が見つかった．その時の興奮は言葉では言い表せない．

後日，答えに落ちこぼしが無いかと確認のためプログラムを2本つくってチェックした．こちらの方は DEBUG のため二週間もかかってしまった．ここ数年 FORTRAN を書いたことがなかった性かもしれない．電卓で一晩，コンピュータで二週間とは何と皮肉なことか．

4．割り切れる条件

ここではコンピュータを安易に使わず筆算と電卓で求める方法を検討してみよう．

問題には1から9までの数学を並べかえて作るとあるが，このまま正直に行くと，

9!＝362880 通り

の数字になる．そこで割り切れる条件を調べ，チェックする回数を減らしていくことを考える．9桁の数字は

abcdefghi

で表されているとする．

1で割れる条件：すべての数（1～9）

2で割れる条件：

2桁目が偶数（2, 4, 6, 8）

3で割れる条件：

1桁目＋2桁目＋3桁目の数値が3で割れる．

$100a+10b+c=(99a+a)+(9b+b)+c$
$=(99a+9b)+(a+b+c)$
$=3\times(33a+3b)+\underline{(a+b+c)}$

4で割れる条件：

4桁目が偶数（2, 4, 6, 8）

3桁目と4桁目で構成される2桁の数値が4で割り切れる．

$100b+10c+d=4\times 25b+\underline{10c+d}$

5で割れる条件：

5桁目が0か5

この場合は0は含まれないので5に固定される．

6で割れる条件：

6桁目が偶数（2, 4, 6, 8）

1桁目＋2桁目＋3桁目＋4桁目＋5桁目＋6桁目の数値が3で割れる．

$100000a+10000b+1000c+100d+10e+f$
$=(99999a+a)+(9999b+b)+(999c+c)$
$\quad+(99d+d)+(9e+e)+f$
$=(99999a+9999b+999c+99d+9e)$
$\quad+(a+b+c+d+e+f)$
$=3\times(33333a+3333b+333c+33d+3e)$
$\quad+\underline{(a+b+c+d+e+f)}$

7で割れる条件：

残念ながらこれは無い．8桁の電卓さえあれば十分である．でも条件をしぼっていけばそれほど多くの回数，電卓をたたく必要はない．

8で割れる条件：

8桁目が偶数（2, 4, 6, 8）

6桁目と7桁目と8桁目で構成される3桁の数値が8で割り切れる．

$1000e+100f+10g+h$
$=8\times 125e+\underline{100f+10g+h}$

9で割れる条件：

3や6の場合と同じようにしなければならないのだろうか？　その必要はない．1から9までの数字が重複なく入っているので，これらの数字を足してみよう．

$7+2+1+6+5+8+9+4+3$　（重複のない任意の数）
$=1+2+3+4+5+6+7+8+9$（並べかえる）
$=9\times(9+1)/2$
$=45$
$=\underline{9}\times 5$

つまり9で割れるかのチェックは必要ないということだ．

5．全部の数を調べる必要は無い

以上のことをもう少し整理してみよう．1から9までの9個の数字は，

偶数が4個（2, 4, 6, 8）
奇数が5個（1, 3, 5, 7, 9）で構成されている．
5桁目は5に固定される．
結局，選べる数字は次の通りである．

1桁目：(1, 3, 7, 9) 奇数— 4通り
2桁目：(2, 4, 6, 8) 偶数— 4通り
3桁目：(1, 3, 7, 9) 奇数— 4通り
4桁目：(2, 4, 6, 8) 偶数— 4通り
5桁目：　5　奇数— 1通り
6桁目：(2, 4, 6, 8) 偶数— 4通り
7桁目：(1, 3, 7, 9) 奇数— 4通り
8桁目：(2, 4, 6, 8) 偶数— 4通り
9桁目：(1, 3, 7, 9) 奇数— 4通り

これらの組み合わせを掛け合わせると

$4\times4\times4\times4\times1\times4\times4\times4\times4$
$=4^8\times1$
$=65536$ 通り

ということになる．

でも，またまたよく考えるともっと減らせることに気がつく．1桁目から9桁目まで順番に数字を重複なく選んでいくのであるから上の表は次のように書きかえられる．

1桁目：(1, 3, 7, 9) 奇数－4通り
2桁目：(2, 4, 6, 8) 偶数－4通り
3桁目：(1, 3, 7, 9) 奇数－3通り
4桁目：(2, 4, 6, 8) 偶数－3通り
5桁目：　5　奇数－1通り
6桁目：(2, 4, 6, 8) 偶数－2通り
7桁目：(1, 3, 7, 9) 奇数－2通り
8桁目：(2, 4, 6, 8) 偶数－1通り
9桁目：(1, 3, 7, 9) 奇数－1通り

これらの組み合わせを掛け合わせると

$4\times4\times3\times3\times1\times2\times2\times1\times1$
$=4^2\times3^2\times2^2\times1^3$
$=16\times9\times4\times1$
$=576$ 通り

となる．

最初の 9!＝362880 通りから65536通りを経て576通りまでしぼることができた．これならもう少し工夫をすればコンピュータを使わず電卓で答えが出せそうだ．でも，どういう手順で探すのだろうか？

6．消　去　法

この問題ではいくつか法則を利用することができる．まず1桁目から3桁目までの数字の関係である．条件によれば，

$$\begin{array}{ccccc} \text{1桁目} & & \text{2桁目} & & \text{3桁目} \\ \begin{pmatrix}1\\3\\7\\9\end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix}1\\3\\7\\9\end{pmatrix} \end{array}$$

であるので，

$4\times4\times3=48$ 通りあるように思えるが，3桁目までの数が3で割れなければならないから，

1桁目	2桁目	3桁目
1	2	3

1	2	9
3	2	1
3	2	7
7	2	3
7	2	9
9	2	1
9	2	7
1	4	7
7	4	1
3	6	9
9	6	3
1	8	3
1	8	9
3	8	1
3	8	7
7	8	3
7	8	9
9	8	1
9	8	7

の20通りしかないことになる．

同じ関係が4桁目から6桁目までの数字についても言える．1桁目から3桁目までの数字はすでに3で割れることが分かっているのでチェックの必要はない．結果を示すと

4桁目	5桁目	6桁目
2	5	8
4	5	6
6	5	4
8	5	2

の4通りということになる．

1桁目から6桁目までをあわせて考えると，

20通り（1～3桁）×4通り（4～6桁）

＝80通り

になる．

ここで，これらの6桁の数字を書きあげてみる．重複の数字がある場合や4桁目のチェック（4で割れるか）を調べると，6桁まで通過するのは20通りになる．以下の通りである．

1	2	3	6	5	4
1	2	9	6	5	4
3	2	1	6	5	4
3	2	7	6	5	4
7	2	3	6	5	4
7	2	9	6	5	4
9	2	1	6	5	4
9	2	7	6	5	4
1	4	7	2	5	8
7	4	1	2	5	8
3	6	9	2	5	8
9	6	3	2	5	8
1	8	3	6	5	4
1	8	9	6	5	4
3	8	1	6	5	4
3	8	7	6	5	4
7	8	3	6	5	4
7	8	9	6	5	4
9	8	1	6	5	4
9	8	7	6	5	4

次に7桁目を決めるのだが，7桁目は奇数であり候補が2個ある．たかだか多くて

20通り×2通り＝40通り

の電卓をたたかねばならない．次の場合はチェックの必要はない．7桁目に選んだ数の最初の候補で幸運にも7で割り切れたならもう一つの候補はチェックの必要はない．

1＋7＝8（偶数），3＋7＝10＞9，7＋7＝14＞9

となるからだ．このようにして7桁目まで通過した数は次の8個となった．

1	2	9	6	5	4	7
3	2	1	6	5	4	9
7	2	9	6	5	4	1
9	2	1	6	5	4	3
1	4	7	2	5	8	3
9	6	3	2	5	8	1
3	8	1	6	5	4	7
7	8	3	6	5	4	9

8桁目は残った偶数であるので自動的に決まる．

							8桁目
1	2	9	6	5	4	7	8（4で割れない）
3	2	1	6	5	4	9	8（4で割れない）
7	2	9	6	5	4	1	8（4で割れない）
9	2	1	6	5	4	3	8（4で割れない）
1	4	7	2	5	8	3	6（8で割れない）
9	6	3	2	5	8	1	4（4で割れない）
3	8	1	6	5	4	7	2
7	8	3	6	5	4	9	2（8で割れない）

4で割れるか（暗算）

8で割れるか（電卓）

このようにして8桁目まで通過したのは

3　8　1　6　5　4　7　2

だけになった．9桁目は残りの奇数であり，3で割れることが既に分かっているので，この場合

3　8　1　6　5　4　7　2　9

となる．これが，消去法による解である．

7．迷路脱出法

数年前から迷路がブームになっている．どこへ行っても「日本一の巨大迷路」と宣伝されているのでこれでは「日本一」がいっぱいあることにある．英語で言うと

This is one of the biggest mazes in Japan.

の構文（最上級の一つ）にあたるのかなとも思う．まあ，それはどうでもいいや．

この迷路を抜け出す方法がこの問題には適しているように思える．上で示した各桁の取りうる数字を順番におって行きつ戻りつ試行錯誤をすればよい．

迷路脱出にもいろいろ方法があるらしい．芦ケ原伸之氏によれば「めちゃくちゃ方式」「壁伝い方式」「トレモーの法則」などがある（参考文献2)）．私の辿った迷路脱出の軌跡を示しておこう．

1 2 3 6 5 4

1 2 9 6 5 4 7

1 4 7 2 5 8 3

1 4 7 6 5

1 6

1 8 3 2 5

1 8 3 6 5 4

1 8 9 2 5

1 8 9 6 5 4

3 2 1 6 5 4 9

3 2 7 6 5 4

3 4

3 6 9 2 5 8

3 8 1 2 5

3 8 1 6 5 4 7 2 9（唯一の解）

3 8 7 2 5

3 8 7 6 5 4

7 2 3 6 5 4

7 2 9 6 5 4 1

7 4 1 2 5 8

7 2 1 6 5

7 6

7 8 3 2 5

7 8 3 6 5 4 9

7 8 9 2 5

7 8 9 6 5 4

9 2 1 6 5 4 3

9 2 7 6 5 4

9 4

9 6 3 2 5 8 1

9 8 1 2 5

9 8 1 6 5 4

9 8 7 2 5

9 8 7 6 5 4

全体で34通りの重複しない経路があり，そのうち33通りが袋小路であり唯1通りの

3 8 1 6 5 4 7 2 9

の経路が抜け出る道であったのだ．

広告用紙の裏側に何枚も苦労して書いた数字とコンピュータでチェックした数字はあっていた．電卓を使ったのは7桁の数字だけで50回程度であった．やはりコンピュータは安易に頼ってはいけない．コンピュータ屋が言っているのだから間違いないだろう．

これにて一件落着！

［付記］　参考文献3)によれば，この問題を出題したのはマーチン・ガードナー氏であるとの説明がある．この素晴しい数を発見したのは一体誰なのだろうか。

参考文献

1) Bolt, B. "Mathematical Funfair" Cambridge U. Pr.

2) 芦ケ原伸之『芦ケ原伸之の究極のパズル』講談社

3) D.J. アルバース，G.L. アレクサンダーソン共編，一松信監訳『数学人群像』近代科学社，p. 120参照

（にしやま　ゆたか）