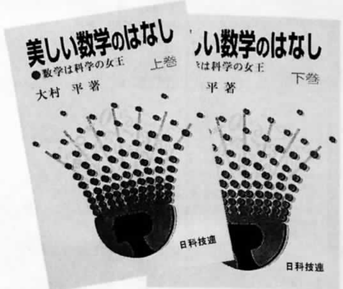
ブックガイド



美しい数学のはなし（上・下）

大　村　　平著

B 6・上(234頁)，下(244頁)
本体 各1,500円
日科技連　発行

この本は，上・下巻あわせて15章から成る数学の読切り短編集で，興味のある章だけを順不同で，つまみ読みできるようになっている．

著者は日科技連よりこれまで，「〜のはなし」というタイトルの本を30冊近く出版されている．数学についての「〜のはなし」は12巻あり，今回の著書は，これらのトピックスというところか．

内容は代数，幾何，解析の全体にまたがるが，全分野を，〈ひらめき〉〈鮮やか〉〈意外な〉〈流れる〉〈びっくり〉〈うっかり〉〈おかしな〉〈きれいな〉〈かっこいい〉などのキーワードでくくりなおして各章がまとめてある．

中でも，著者の得意な分野である統計や確率の話が面白い．難易度的には，高校生以上が読者の対象になる．学校の授業で理解できなかったことを補足したり，さらに進んだテクニックを知るための好書である．「こんな解き方もあったのか」と思わせる例題が多く，社会人が数学を勉強し直すための刺激となる本でもある．

平易な文体，それでいて分かり易い．説明が難しくなってきたら，すぐ「ごめんなさい」とあやまる著者のやさしさ．このあたりは「数学はこんなに楽しいものだよ」という著者の人柄が伝わってくる．かといって程度が低いわけではない．『数学の問題―エレガントな解答を求む』（日本評論社）からの引用が数ケ所あり，高度な内容も含んでいる．だから広範囲の読者を意識して執筆されていることは間違いない．

私も，長年数学とつきあっているせいか，たいていの話題はどこかで聞いたり読んだりしている．それでも，知らない話題や，別の解き方が載せてあると「なるほど」と感心してしまう．私の趣味的な領域にはいるが，次の問題が好きだ．

「16人でマージャン大会をやろうと思う．16人が4卓に分かれていっせいに対戦するとする．ある個人についていえば対戦する相手が15人いるのに同時に対戦できる相手は3人であるから，5回戦が必要になる．全員が並行してプレイしながらすべての人と対戦しつくすように5回戦ぶんの組み合わせを作れ」（第12章，座興の数学）というものだ．読者も挑戦されるとよい．

この種の問題は古くからいくつも取り扱われていて，テニスのダブルスの組み合わせなどにも応用がきく．

著者の「〜のはなし」シリーズは多くの読者を引きつけてきた．私も，『統計解析のはなし』や『統計のはなし』を読ませてもらったことがある．読者の立場でなく，このような本が出せればと思うこともある．身近な話題，意外な展開，丁寧な解説，散文調などは羨ましいかぎりであるが，ひとつ気になることがある．

著者は，1953年東京工業大学を卒業後航空自衛隊に就職し，1987年航空幕僚長を経て退官され，NEC の顧問を歴任し，現在，日本航空宇宙工業会の顧問をされている．日経テレコンで過去の記事を検索してみると，航空幕僚長在任時には，FSX（次期支援戦闘機）の機種選定をされている．まさに，異色で不思議な存在である．

「幕僚」とはどんな仕事をすることなのだろうか．早速，辞書で調べてみる．「司令部・本部で，作戦等の企画立案に関して指揮官を補佐する幹部」とある．

第8章に，フランスの数学者で海軍大臣を勤めたことのあるエミール・ボレルのことが引用されているから，軍人だから数学を嗜まないことはないと読める．そういえば，森鷗外も軍人であった．

旧ソ連の崩壊後，東西冷戦は終わり，日米安保条約や自衛隊の存在や意味も変化しつつある．防衛庁や自衛隊が侵略のためのものでなく真に平和のためのものになるとき，私の著者への不思議な思いはなくなるだろう．

西山　豊（大阪経済大学）

線形代数 マスター 30題—28

行列の対角化

加藤明史（鳥取大学）

§15“類題”において，われわれは，二つの n 次正方行列 A，B が条件

$$B=P^{-1}AP \quad (P \text{ は } n \text{ 次正則行列})$$

を満たすとき，A と B は“相似”であるといい，$A \backsim B$ と表した．そして，この相似関係 $\backsim$ は，もはや行列の基本変形によって保存されないが，全行列環 $M_n(K)$ 上の非常に重要な同値関係であり，“基底変換”では決定的な役割を演ずる，と注意しておいた．さらに，§20“類題”では，K^n 上の線形変換 f の標準基底に関する表現行列を A とすれば，正則行列 P によって変換される新しい基底に関する表現行列は，この $B=P^{-1}AP$ の形になることにも注目した．したがって，そこでも指摘しておいたように，相似な行列は同じ線形変換 f の“異なる表現”であり，f の表現行列がなるべく簡単な形（たとえば対角行列）になるような基底を選ぶと都合が良いわけである．

しかしながら，このような“対角化”がすべての正方行列 A に対して可能とは限らないのである．たとえば，

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (a \neq 0)$$

は，どのように正則行列 P を選んでも，$P^{-1}AP$ を対角行列にすることはできないのである．（練習問題1参照）．

一般に，正方行列 A が上3角行列 B に相似なとき，すなわち，適当な正則行列 P によって

$$P^{-1}AP=B \quad (\text{上3角行列})$$

と表されるとき，A は**3角化可能**という．また，特に，A が対角行列に相似ならば，A は**対角化可能**という．もちろん，

“対角化可能 ⇒ 3角化可能”

であるが，逆は正しいとは限らない．与えられた正方行列 A の固有値と固有ベクトルを求めること，これによって A を対角化・3角化すること，その応用――これがいわゆる**固有値問題**である．まず，次の基本的問題を考察しよう．

> **問題 28**
>
> 二つの n 次正方行列 A，B について，次のことを証明せよ：
>
> (1)　A と B が相似ならば，A と B の固有多項式は等しい（したがって，A と B の固有値は一致する）．
>
> (2)　A が3角行列 B に相似ならば，B の対角成分はすべて A の固有値である．

この問題により，A を正則行列 P によって変換して $B=P^{-1}AP$ としても，固有値は変わらないことがわかる．しかし，このとき，A の固有値 λ に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすれば，B の固有値 λ に対する固有ベクトルは $P^{-1}\boldsymbol{x}$ になるから注意しなければならない．なぜなら，

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$$

とすれば，対応する固有ベクトルは

$$B(P^{-1}\boldsymbol{x})=P^{-1}APP^{-1}\boldsymbol{x}=P^{-1}A\boldsymbol{x}=\lambda P^{-1}\boldsymbol{x}$$

となるからである．

解答　$B=P^{-1}AP$ とする．