場合が本当にある．

どうやら道具はすべて「使いよう」であり，ときには「危険を承知で注意して使う」心掛けも必要らしい．

6.4　2階のままで解いたら

振子の問題は中間積分⑽を使わず，直接に

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{1}{2}\sin\theta \quad \text{（定数を⑽と合わせて）} \quad (12)$$

を解くほうがよい．等間隔の分点 $t_k=hk$ ($k=1, 2, 3, \cdots$) に対する近似値 θ_k について，t_k での2階微分係数は**中心差分**

$$\frac{1}{h^2}(\theta_{k+1}+\theta_{k-1}-2\theta_k) \quad (13)$$

によって十分よく近似できる（スペースの関係で証明省略）．

$t=0$ のとき $\theta=\alpha$ とすると，対称性から

$$\theta_0=\alpha,\quad \theta_1=\theta_{-1}$$

としてよいから，最初の1段階は

$$\theta_1=\theta_0-\frac{h^2}{4}\sin\theta_0$$

である．以後は漸化式

$$\theta_{k+1}=2\theta_k-\theta_{k-1}-\frac{h^2}{2}\sin\theta_k;\ k=1,\ 2,\ \cdots$$

によって計算できる．$h=0.2$ として，$\alpha=\frac{\pi}{3}$ のとき θ が符号を変える（半周期を超える）まで計算した結果を表3に示す．このときの半周期は前回示したとおりほぼ 2.38…であるが，この計算では 2.31 くらいになる．なおヘンリチ教授の例では，⑿の係数を現実の重力定数に合せて 9.81 にしているが，換算すると半周期が 2.34 くらいになる．

読者諸賢には，もっといろいろな α，h について計算し，また直接に2階方程式を中心差分で近似して数値計算するのと，中間積分を解く場合との比較検討をするなどの発展課題を残しておく．

表3　中心差分による単振子の解，初期値 $\alpha=\frac{\pi}{3}$

n	t_n	θ_n
0	0.0	1.0472
1	0.2	1.0385
2	0.4	1.0126
3	0.6	0.9698
4	0.8	0.9104
5	1.0	0.8352
6	1.2	0.7453
7	1.4	0.6418
8	1.6	0.5262
9	1.8	0.4007
10	2.0	0.2673
11	2.2	0.1287
12	2.4	−0.1253

[参考文献]

[1]　M. Mascarells-B. Winkelmann, Calculus and the Computer; The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching, ICMI Study Series, Cambridge Univ. Press, 1986 に所載；同書 p.120–134; 図は p.128—．植竹恒男監訳による日本語訳もある．

[2]　P. Henrici, Computaticnal Analysis with the HP-25 Pocket Calculator, John Wiley & Sons, 1977; 日本語訳一松信訳，現代数学社　があった．

（ひとつまつ　しん）

ガウスの正17角形作図法

西山　豊（大阪経済大学）

1．はじめに

私達は，数学史上の有名な定理については知っているが，その証明法については知らないということが多い．フェルマーの最終定理，ガロアの理論，ゲーデルの不完全性定理など，あげれば切りがない．私は，ガウスが証明した正17角形の作図法について，最近まで，その証明法を知らなかった．

一般の正 n 角形についての作図法について，『数学辞典』（岩波書店）には次のような説明がある．

正 n 角形の作図が可能なための必要十分条件は，n を素因数分解したとき，

$$n=2^\lambda P_1\cdots P_k\ (\lambda\geqq 0) \quad (1)$$

で，P_1, …, P_k は，すべて相異なる 2^h+1 の形の素数（Fermat 数）となることである（C.F. Gauss）．この式に，λ や h の値を入れてみると，

$n=3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 17, \cdots$

などが求まる．

私は，ある論文に「C.F.ガウスが正17角形の幾何学的作図法を得たことは有名である」と引用したところ，「ところで，正17角形はどのように描くのですか」という問合せがあった．辞典の丸写しで，内容を知らなかったのだ．

正3角形や正5角形の作図については，古代ギリシャのユークリッドの時代に確立されている．ところがこの正5角形の作図法についてすら，現代の我々が完全にマスターしているかというと，それはあやしい．

正5角形の作図法は，1辺を固定した描き方と，円に内接する描き方の2通りがあり，ともに，分度器を使わずにコンパスと定規だけで描ける．本題ではないので説明を省略するが，これらは，

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \quad (2)$$

または，

$$\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \quad (3)$$

となる関係を応用したものである．

私は，代数学の専門家ではない．これから説明する内容は，ガウスの試みた正17角形の作図法について調べてみたという程度に理解していただきたい．

2．ガウスの日記から

高木貞治『近世数学史談』の第1章に，「1796年3月30日の朝，19歳の青年ガウスが目ざめて臥床から起き出でようとする刹那に正十七角形の作図法に思い付いた」として，彼の日記がのせられている．それを要約するとつぎのとおりである．

正17角形の作図の可能性を証明するだけならば，簡単明瞭である．

$360°=17\phi$

としたとき，$\cos\phi$ の値が平方根で表されるならば作図可能である．$\cos\phi$ は単位円周上の x 座標の値を示している．そして，ガウスは，その計算過程を示している．説明を加えながら紹介していこう．

まず，ガウスは，つぎのように置く．

「 $\cos\phi+\cos 4\phi=a$

$\cos 2\phi+\cos 8\phi=b$

$\cos 3\phi+\cos 5\phi=c$

$\cos 6\phi+\cos 7\phi=d$ 」

ここで注意すべきことは，$\cos\phi$ から $\cos 8\phi$ までを4つの変数 a，b，c，d に置き換えていることである．このような置き換えは，これに限るのだろうか．アトランダムに設定するとすれば，組み合わせは，全部で ${}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2=2520$ 通りある．ガウスは，すべての場合を検討したのだろうか．そうではない．このことは，後で詳しく見るが，円分方程式の理論と深く関係している．

つぎに，

「 $a+b=e$

$c+d=f$

とおくと，よく知られている通りに

[1]　$e+f=-\frac{1}{2}$

となる．」とある．

[1] 式を理解するためには，大学受験の数学

によくある問題を思い出せばよい．

（定理）

自然数 n に対して，

$S_n=\cos\phi+\cos 2\phi+\cdots+\cos n\phi$

とおくと，

$$2S_n\sin\frac{\phi}{2}=\sin\frac{2n+1}{2}\phi-\sin\frac{\phi}{2}$$

が成立する．

定理の証明は，$2\cos k\phi\sin\dfrac{\phi}{2}$ $(k=1,\ \cdots,\ n)$ について，積→和の公式を適用すると，途中の項が消去できて整頓される．そこで

$$S_n=\left(\sin\frac{2n+1}{2}\phi-\sin\frac{\phi}{2}\right)\Big/2\sin\frac{\phi}{2}$$

に $n=8$，$\phi=\dfrac{2\pi}{17}$ を代入すると

$\sin\dfrac{2n+1}{2}\phi=0$ となる．よって $S_8=-\dfrac{1}{2}$．

そして，a，b，c，d の２項ずつの積をもとめている．

「簡単なる計算に由って，但し

$\cos n\phi=\cos(17-n)\phi$

に注意して，

$$2ab=e+f=-\frac{1}{2}$$

$$2ac=2a+b+d$$

$$2ad=b+c+2d$$

$$2bc=a+2c+d$$

$$2bd=a+2b+c$$

$$2cd=e+f=-\frac{1}{2}」$$

上の式で，例えば，$2ab$ の式は次のようになる．

$$\begin{aligned}2ab&=2(\cos\phi+\cos 4\phi)(\cos 2\phi+\cos 8\phi)\\&=2\cos\phi\cos 2\phi+2\cos\phi\cos 8\phi\\&\quad+2\cos 4\phi\cos 2\phi+2\cos 4\phi\cos 8\phi\\&=(\cos 3\phi+\cos\phi)+(\underline{\cos 9\phi}+\cos 7\phi)\\&\quad+(\cos 6\phi+\cos 2\phi)+(\underline{\cos 12\phi}+\cos 4\phi)\end{aligned}$$

ここで，$\cos 9\phi=\cos 8\phi$，$\cos 12\phi=\cos 5\phi$ と置き換えて整理すると，

$$\begin{aligned}&=(\cos\phi+\cos 4\phi)+(\cos 2\phi+\cos 8\phi)\\&\quad+(\cos 3\phi+\cos 5\phi)+(\cos 6\phi+\cos 7\phi)\\&=a+b+c+d\\&=e+f\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる．

「故に

$$\begin{aligned}&2ac+2ad+2bc+2bd\\&=4a+4b+4c+4d\end{aligned}$$

即ち

$2ef=-2$

又は

[2]　$ef=-1$

これ以後は，２次方程式の解と係数の関係を用いた解法である．すこし長いが引用させていただく．

「そこで [1] と [2] とから，e と f とが方程式

$$x^2+\frac{1}{2}x-1=0$$

の根，従って一つは

$=-\dfrac{1}{4}+\sqrt{\dfrac{17}{16}}$，又一つは $=-\dfrac{1}{4}-\sqrt{\dfrac{17}{16}}$

前のが $=e$ で，後のが $=f$ であることは数値からすれば，一見して分かる．

さて a と b とは方程式

$$x^2-ex-\frac{1}{4}=0$$

の根であるから，その値は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}e\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^2}\\&=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}\pm\frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}}\end{aligned}$$

ここでは上の符号が a，下の符号が b に対するものであること明らかである．何故なら

$$\begin{aligned}a-b=&(\cos\phi-\cos 2\phi)\\&+(\cos 4\phi-\cos 8\phi)\end{aligned}$$

は無論正であるから，全く同様に

$$c=-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{17}+\frac{1}{8}\sqrt{34+2\sqrt{17}}$$

$$d=-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{17}-\frac{1}{8}\sqrt{34+2\sqrt{17}}$$

さて，最後に $\cos\phi$ と $\cos 4\phi$ とは明らかに次の二次方程式の根である（積 $\cos\phi\cdot\cos 4\phi=\dfrac{1}{2}c$ だから）．

$$x^2-ax+\frac{1}{2}c=0$$

故に

$$\cos\phi=+\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}c}$$

$$\cos 4\phi=+\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}c}$$

然るに

$2a^2=2+b+2c$

になるから

$$\cos\phi=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}b-\frac{1}{4}c}$$

$$\begin{aligned}&=-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}\\&\quad+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}」\end{aligned}$$

これが，ガウスがもとめた $\cos\phi$ の値である．

3．ガウスの円分方程式論

このようにして，正17角形の作図に必要な $\cos\phi$ の値が求まった訳であるが，これは，ただ検算しただけであって，なぜそうなるのかの本質的なことについては，まだ何も触れていないことになる．つまり，$\cos\phi$ から $\cos 8\phi$ までを４つの変数 a，b，c，d で置き換えたことの理由について述べなければならない．

その理由は，「ガウスの日記」には書かれていない．そのことを知るには，倉田令二朗『ガウス円分方程式論』や，高瀬正仁訳『ガウス整数論』の力を借りなければならない．

方程式　$x^n-1=0$　(4)

を考えてみる．この方程式の根はいうまでもなく１の n 乗根であり，よく知られているように

$e^{\frac{2\pi ki}{n}}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$

である．このとき，オイラーの公式より

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$　(5)

の関係がある．

n 個の根の中で，n 乗してはじめて１になるものを原始 n 乗根という．

$e^{\frac{2\pi i}{n}}$ は，１の原始 n 乗根であるが，これは複素平面で単位円周上の偏角が $\dfrac{2\pi}{n}$ の点，すなわち全円周の n 等分点を表し，$e^{\frac{2\pi ki}{n}}$ は，その k 倍の偏角をもつ円周上の点を表す．

こうして複素平面を媒介にすることによって，方程式(4)は，正 n 角形という古代ギリシャ以来の図形と結びつくことになる．これがガウスの基本的視点であり，複素平面を導入したのはガウスが最初の数学者であった．

さて，(4)式は，

$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$

だから，(4)の１以外の根はすべて

$F(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$　(6)

の根となる．これを円分方程式あるいは円周等分方程式という．

$x^n-1=0$ において，原始 n 乗根 ω が既知ならば，この方程式の解は，

$1,\ \omega,\ \omega^2,\ \cdots,\ \omega^{n-1}$

となる．

たとえば，$x^3-1=0$ について考えてみると，

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$

であるから，３つの根は 1，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ となる．

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\omega$ とすると，$\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\omega^2$ となり，根が $1,\omega,\omega^2$ となっていることを確認できる．

この場合，$3\theta=2\pi$ であり，

$\omega=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$

$\omega^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta=e^{i2\theta}$

$\omega^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta=e^{i3\theta}=1$

となり，３つの根は巡回していることがわかる．

ここで，剰余の考え方を用いたつぎの定理を示しておこう．

（定理）

p を素数とするとき，円分方程式

$F(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$

の根の集合を Ω で表すと，$r\in\Omega$ は，１以外の $x^p-1=0$ の根ですべて複素数である．そして，e は p で割り切れない正負の整数とすると，

(1)　$r^p=1$，$r^{2p}=r^{3p}=\cdots=1$，$r^{ep}=1$

(2)　λ，μ を整数とするとき

$\lambda\equiv\mu\ (\mathrm{mod}.p)\iff r^\lambda=r^\mu$

(3)　$r\in\Omega$ とすれば，

$\Omega=\{r^e,\ r^{2e},\ \cdots,\ r^{e(p-1)}\}$

$r^e+r^{2e}+\cdots+r^{e(p-1)}=-1$

が成り立つ．

そして，ガウスは f-項周期というものを定義する．

（定義）

p を奇素数，r を１の原始 p 乗根，$p-1=fe$ とし，g を p の原始根とする．λ を任意の整数として，f-項周期 $(f,\ \lambda)$ を次のように定義する．

$(f,\ \lambda)=[\lambda]+[\lambda h]+[\lambda h^2]+\cdots+[\lambda h^{f-1}]$

（ただし　$h=g^e$）

ここで，正17角形の場合について計算してみよう．素数17の原始根を３とすると，

$p=17$，$p-1=16=16\times 1=f\times e$，$g=3$，

$h=g^e=3^1=3$

となり，16項周期は，

$$\begin{aligned}(16,\ 1)=&[1]+[3]+[9]+[10]+[13]+[5]\\&+[15]+[11]+[16]+[14]+[8]\\&+[7]+[4]+[12]+[2]+[6]\end{aligned}$$ となる．

つまり，{[1]，…，[16]} は，原始根を３としたとき，17 を法とした巡回群となっている．たと

えば，上式右辺の第４項[10]は，

$\lambda h^3=1\times3^3=27=10$ (mod.17)

のようにして求められる．原始根，法，巡回群などの用語の説明は，代数学，整数論，群論などの専門書に委ねる．

それにしても，素数と原始根の関係は実にうまくできている．私が原始根という言葉を知ったのは，コンピュータで擬似乱数を発生させるサブルーチンを勉強したときのことである．

素数 $2^{31}-1$ に対する原始根は $2^{16}+1$ である．

これによって，コンピュータが表現する，すべての整数をランダムに巡回する数列を生成することができるというのだ．今回の問題も，16個の根を，剰余の考え方にもとづき並び変えたことが大きなポイントになっている．

このようにして，16項周期が求められたわけであるが，ガウスは f-項周期を分解する定理を示している．

（定理）

$p-1=abc$ のとき，bc-項周期 $(bc,\ \lambda)$ は b 個の c-項周期の和になる．

$$(bc,\ \lambda)=(c,\ \lambda)+(c,\ \lambda g^{a})+(c,\ \lambda g^{2a})+\cdots+(c,\ \lambda g^{a(b-1)})$$

参考文献(2)の27〜28ページを参考にして16項周期を２個の８項周期に分解することを試みてみよう．

$p=17,\ p-1=16=1\times2\times8=a\times b\times c,$
$a=1,\ b=2,\ c=8,\ bc=16,\ g=3$ より
$(16,\ 1)=(8,\ 1)+(8,\ 3)$

となる．(8, 1) と (8, 3) は定義により，

$$(8,\ 1)=[1]+[9]+[9^2]+[9^3]+[9^4]+[9^5]+[9^6]+[9^7]$$
$$=[1]+[9]+[81]+[729]+[6561]+[59049]+[531441]+[4782969]$$

(mod.17) の最小剰余をとって

$$=[1]+[9]+[13]+[15]+[16]+[8]+[4]+[2]$$
$$=[1]+[2]+[4]+[8]+[9]+[13]+[15]+[16]$$

$$(8,\ 3)=[3]+[3\cdot9]+[3\cdot9^2]+[3\cdot9^3]+[3\cdot9^4]+[3\cdot9^5]+[3\cdot9^6]+[3\cdot9^7]$$
$$=[3]+[27]+[243]+[2187]+[19683]+[177147]+[1594323]+[14348907]$$
$$=[3]+[10]+[5]+[11]+[14]+[7]+[12]+[6]$$
$$=[3]+[5]+[6]+[7]+[10]+[11]+[12]+[14]$$

となる．

これで，16項周期 (16, 1) は，２つの８項周期 (8, 1) と (8, 3) に分解されたことになる．分解する定理をつぎつぎと適用していけば，最終の１項周期まで分解することができる．

そして，分解の過程を一覧表にすると表１のようになる．「ガウスの日記」に示されていた a,b,c,d,e,f の変数と $\cos\theta$ から $\cos 8\theta$ をこの表に併記しておいた．このことで，ガウスが

$$\cos\phi+\cos4\phi=a,\quad \cos3\phi+\cos5\phi=c$$
$$\cos2\phi+\cos8\phi=b,\quad \cos6\phi+\cos7\phi=d$$
$$a+b=e\quad,\quad c+d=f$$

と置いた理由が理解されるであろう．

- $\Omega=(16,1)$
  - $(8,1)$ e
    - $(4,1)$ a
      - $(2,1)$ [1], [16] $\cos\theta$
      - $(2,13)$ [4], [13] $\cos4\theta$
    - $(4,9)$ b
      - $(2,9)$ [8], [9] $\cos8\theta$
      - $(2,15)$ [2], [15] $\cos2\theta$
  - $(8,3)$ f
    - $(4,3)$ c
      - $(2,3)$ [3], [14] $\cos3\theta$
      - $(2,5)$ [5], [12] $\cos5\theta$
    - $(4,10)$ d
      - $(2,10)$ [7], [10] $\cos7\theta$
      - $(2,11)$ [6], [11] $\cos6\theta$

表１．f-項周期の分解過程

このようにして，$p=17$ のときの１以外の16個の根は表２のように計算される．図１に正17角形の概略図を示しておく．

このような分解が，

$$x^{17}-1=(x-1)(x^{16}+x^{15}+\cdots+x+1)$$

の右辺の第２項を因数分解できることになるのだが，なぜ，そうなるのかは現在の私には分からない．このことを知るには，さらに詳しく勉強しなければならないが，そこには代数学の奥深い美しさが存在するだろう．私は，その美しさの一端を垣間見た気がした．

[1], [16]	$0.9324722294\pm0.3612416662i$
[2], [15]	$0.7390089172\pm0.6736956436i$
[3], [14]	$0.4457383558\pm0.8951632914i$
[4], [13]	$0.0922683595\pm0.9957341763i$
[5], [12]	$-0.2736629901\pm0.9618256432i$
[6], [11]	$-0.6026346364\pm0.7980172273i$
[7], [10]	$-0.8502171357\pm0.5264321629i$
[8], [9]	$-0.9829730997\pm0.1837495178i$

表２．16個の根

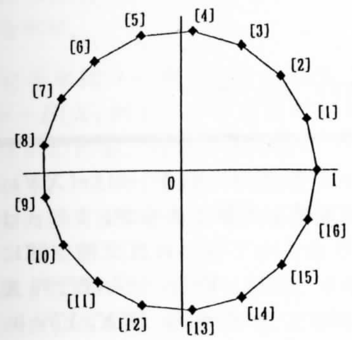

図１．正 17 角形と根の関係

４．ルートの作図法など

$\cos\phi$ の値が根号で表されたわけだが，具体的に作図することを考えてみよう．

数学でいう作図問題とは，コンピュータで数値計算し，その概略図を描くことではない．平面上に２点（0点と１点，つまり線分 $\overline{01}$）が単位量として与えられているとき，これと，コンパスと定規だけで作図するのである．定規は直線を引くためにだけ使い，計測の機能は無いとする．

そこで，根号の長さをどのようにして作図するのかが問題になる．根号（ルート）の長さは図２に示すように，すべて作図可能である．

まず，１辺の長さが１の正方形を描く．すると，「三平方の定理」より対角線の長さは $\sqrt{2}$ となる．そこで $\sqrt{2}$ を半径として円弧を描き，その長さを正方形の底辺の延長線上に移す．すると，たての長さが１，横の長さが $\sqrt{2}$ の長方形ができる．

この長方形に，また「三平方の定理」を適用すると，対角線の長さは $\sqrt{3}$ となる．このようにして求めていけば，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$ の長さが求まることになる．この方法で行けば，$\sqrt{17}$ の長さの作図はクリアできたことになる．

つぎに，整数のルートではなく，任意の数値のルートの作図について考えてみよう．それは参考文献(2)の50〜51ページに詳しい．そこには，分数 $\left(\dfrac{a}{b}\right)$ とルート $(\sqrt{a})$ の作図の説明がある

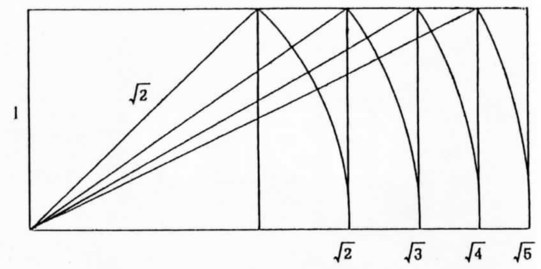

図２．根号（ルート）の長さ

（図３，図４）．

約200年前（1796年）に C.F.ガウスが発見した正17角形の作図法は，コンピュータがこれだけ

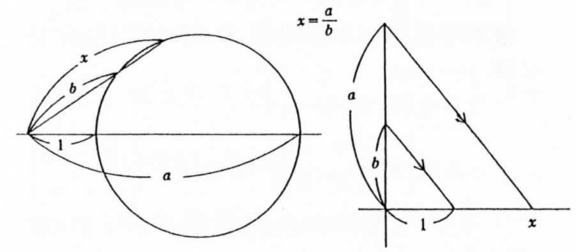

図３．分数 $\left(\dfrac{a}{b}\right)$ の作図

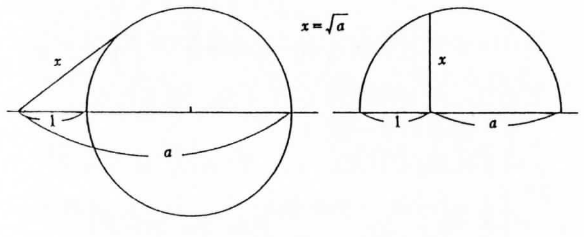

図４．ルート $(\sqrt{a})$ の作図

発達した現代においてすら，新鮮な感動を与える．私は，ガウスの思考力や創造力の素晴らしさを再確認するだけだった．

参考文献

(1)　高木貞治『近世数学史談・第３版』共立出版，1987
(2)　倉田令二朗『ガウス円分方程式論』河合文化教育研究所，1988
(3)　C.F.ガウス，高瀬正仁訳『ガウス整数論，Disquisitiones Arithmeticae』朝倉書店，1995
(4)　西山豊「ガウスの正17角形作図法」『大阪経大論集』，1997.5

（にしやま　ゆたか）