円周率 π をめぐって

上野健爾著
A 5 判　164頁／¥2,000
日本評論社　発行

この本の書評を頼まれたとき，大変なものを引き受けてしまった，と思った．本のタイトルからして円周率についての啓蒙書かエッセイだろうと思っていたが，大学数学への入門のための，しっかりした数学の本であったからだ．私は，大学の数学で完全に落ちこぼれてしまった．落ちこぼれた理由を大学紛争のせいにしているが，本当は大学の数学を正しく理解していなかったからだと思う．ここでは落ちこぼれた学生の立場で，読者の立場としての書評としたい．

全体は3章に分かれ，第1章は円周率 π とはどのような数か，第2章は三角函数と指数函数，第3章は微積分入門となっている．第1章で π を求めるアルキメデスと安島直円の方法を紹介したあとは，数学全体の話となる．高校から大学に向けて数学を挫折することなく学ぶための専門書と思ってよい．第1章と第2章は，オイラーが発見した関係式 $e^{2\pi i}=1$ を証明することを目標に組み立てられている．そして，第3章で微積分の立場からもこのことを裏付けている．三角函数と指数函数が複素数，無限級数展開の世界でつながることを解説している．

いままで，高校数学でバラバラに学んだ読者にとっては，これらが見事につながっていることを見ると，ここに数学の美を発見することだろう．

高校数学では学ばず，大学で始めて学ぶ新しい項目を列挙してみる．複素数の行列表示，代数的数と超越数，超越数は代数的数よりはるかに多いことがわかっていながら，見つかっているのは π と e だけであること，ユークリッドの互除法と剰余類，$\sin x$ と $\cos x$ の無限級数展開，e^x の無限級数展開，e^x の複素数への拡張，写像，無限級数の収束半径，連続と微分可能，テイラー展開，ラグランジュの剰余項，ロルの定理，曲線の長さ，などである．高校数学で満足しない読者にはワクワクする内容ばかりである．

私を含め，多くの学生が大学数学で挫折する理由を考えてみたい．高校数学は，問題があり答えがあった．ところが大学数学はこのスタイルを踏襲しない．ほとんどが定理と補題の連続で，問題といってもそれらの証明問題が多い．証明法は数学的帰納法か背理法で，一見明らかであるような定理に対して，これで証明になっているのかなっていないのか判断がつきにくい証明を行う．また，大学の数学で要求されるのは厳密性である．たとえば，極限をとる操作と無限級数の和をとる操作を交換することは一般的にみとめられていない．著者は，和算が明治時代に消滅した理由を厳密性と論理の欠如であるとしている．さらに，表記法をくわえて大学数学は一段と抽象性を増し，ますます雲の上の存在になってしまう．でも，根気良く学べば，これはそれほど問題ではない．

私は，数学とは何を学ぶのか，その目標は何かのアウトラインが明確でないために挫折が起こるのではないかと思う．数学のもともとの問題は，古代ギリシャの三大難問にまでさかのぼる．角の三等分，立方倍積問題，円積問題の証明のために多くの数学者が悪戦苦闘した結果が，今日の現代数学として発展し体系化されたのである．C. F. ガウスが代数学の基礎を築いたのも，正十七角形の作図が可能であるかの証明を契機にしたのである．つまり，最終目標を明示することも大事である．ところが，これらの最終目標に魅力を感じるか感じないかは趣味の問題である．数学が嫌いな人にいくら数学が面白いといっても通じないのは，絵心のない人に絵の美しさを説明しても無駄なことに似ている．数学が大学へ入るための手段のものであるかぎり，この本を読んで素晴らしいと思うことはないだろう．数学が受験というものから解放されて，本来の数学の姿が取り戻されたとき，この本は読者にとって新鮮なもので，価値あるものに見えてくることだろう．

（大阪経済大学 / 西山豊）

高校生のための数理学
大学への仮想飛び入学

微　　分

大学入試問題の実微分から学部の複素微分迄

梶原　壤二

（今月の問題）

問題1. $f(x)=\dfrac{1}{e^x+1}$ の第一次導関数 $f'(x)$ の値は？である．

（平成9年度静岡理工科大学入学試験）

問題 2. $x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$，$y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を x，y で表すと？となる．

（平成9年度東北学院大学工部入学試験）

問題 3. (ア)余弦 cos の加法定理を書け．(イ) $\cos 2x$ を $\sin x$ の式で表せ．(ハ)関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ の定義を書け．(ニ)上の結果と $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ であることのみを用いて，$f(x)=\cos x$ の導関数を求めよ．(ホ) $f(x)=\cos x$ （$\pi<x<2\pi$） の逆関数を $g(x)$ とする．このとき，$g(x)$ の導関数を求めよ．

（平成9年度富山医科歯科大学医学部前期日程試験）

問題 4. $x=\sin t$，$y=\sin t+2\cos t+3\tan t$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$ を x を用いて表すと？である．ただし，$0\leq t<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

（平成9年度埼玉工業大学入学試験）

問題 5. $f(x)=\log(\sin 4x)-\log(\sin 2x)$ のとき，$f'(x)=?\tan ?x$ である．

（平成9年度日本大学理工学部入学試験）

問題 6. 関数 $f(x)=\sin(1+\log x)$ を微分せよ．

（平成9年度大阪工業大学入学試験）

問題 7. (ア) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ を微分せよ．(イ)関数 $f(x)$ は微分可能とする．次の命題は正しいか？「$f(0)=1$ とし，$x>0$ のとき常に $f'(x)<0$ であるとする．このとき，$f(a)<0$ となる正の数 a が存在する．」もし，正しければ証明し，正しくなければ反例をあげよ．

（平成9年度津田塾大学学芸学部入学試験）

問題 8. $g(x)=\log(\log(x))$ （$x>1$） とする．$g(a)=0$ のとき，$\log(g'(\mathrm{a}))=?$ である．

（平成9年度東邦大学医学部入学試験）

問題 9. $x>0$ で定義された関数 $y=x^{\sqrt{x}}$ を微分せよ．

（平成9年度東京電気大学理工学部入学試験）

問題 10. $f(x)$ は $x>0$ で定義された微分可能な関数で，どのような $x>0$，$y>0$ に対しても

$$f(xy)=f(x)+f(y) \tag{1}$$

が成立している．(ア) $f(1)$ を求めよ．(イ) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$ が成り立つことを示せ．(ウ)導関数の定義に従って，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．ただし，$f'(1)=C$ （C は定数） とする．(エ) $f(x)$ を求めよ．

（平成9年度甲南大学理学部入学試験）

問題 11. 2^x は $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ の様な整関数にならぬ事を示せ．

（新潟県高校教員採用試験）

連続性　数直線 $\mathbf{R}$ 上の，両端点を含まない，開区間 I 上で定義された実変数 x の関数 $f(x)$ がある．a を I の任意の点とする．任意の正数 ε に対して，正数 δ が有って，$|x-a|<\delta$ を満たす，I の点 x に対して

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon \tag{2}$$

が成立する時，関数 $f(x)$ は点 a で**連続**であると言う．

微分可能性　数直線 R 上の開区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ は，I の点 a にて，

$$f'(a):=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{3}$$

の右辺の極限が存在する時，点 a で**微分可能**であると言い，この極限を**微分係数**と言い，左辺の様に記す．(3)式は，極限の定義より，任意の正数 ε に対して，正数 δ が有って，$0<|h|<\delta$ を満たす，$a+h$ が I に属する様な任意の h に対して

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\right|<\varepsilon \tag{4}$$

が成立する事と同値である．ここで，

$$r(h):=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a) \tag{5}$$

と置くと，$r(h)\to 0$ （$h\to 0$） であって，上式(5)を移項，分母を払うと

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+r(h)h \tag{6}$$