5)　Seitz 演算子$[\hat{\sigma}\,|\,\vec{v}]$は，$[\hat{\sigma}\,|\,\vec{v}]\vec{r}=\hat{\sigma}\vec{r}+\vec{v}$ のように作用する[8]．原点から $\vec{a}$ 離れた位置にある鏡 m_a は，Seitz 演算子で表記すると，$[\hat{m}_a\,|\,2\vec{a}]$ である．

$$
\begin{aligned}
&[\hat{m}_c\,|\,2\vec{c}][\hat{m}_b\,|\,2\vec{b}][\hat{m}_c\,|\,2\vec{c}][\hat{m}_a\,|\,2\vec{a}]\\
&=[\hat{m}_c\,|\,2\vec{c}][\hat{m}_c\,|\,\hat{m}_b\hat{m}_c2\vec{a}+\hat{m}_b2\vec{c}+2\vec{b}]\\
&=[1\,|\,\hat{m}_c\hat{m}_b\hat{m}_c2\vec{a}+\hat{m}_c\hat{m}_b2\vec{c}+\hat{m}_c2\vec{b}+2\vec{c}]=[1\,|\,-2\vec{a}+2\vec{b}-2\vec{a}+2\vec{c}]\\
&=[1\,|\,-6\vec{a}]
\end{aligned}
$$

かくして，$m_cm_bm_cm_a$ は，並進 $-6\vec{a}$ であることがわかる．

●文献……………………

[1]　谷克彦：万華鏡の不思議，数学教育，No. 552，(2003.11)，pp. 36-40

[2]　A. V. Shubnikov, V. A. Koptsik: "Symmetry in science and art" in Russian, Nauka, (1972), pp. 63, 132, 173

[3]　谷克彦：非周期タイリングの万華鏡設計，日本数学協会第1回年次大会，(2003.8)，pp. 74-77

[4]　I. Grossman, W. Magnus，浅野啓三訳：群とグラフ，河出書房，(1970)，pp. 39-74, Translation of Groups and their graphs, Random House, (1964)

[5]　谷克彦：ペンローズ万華鏡，日本万華鏡大賞エントリー作品，(2003.11)

[6]　三好泰弘さんのホームページ，http://www.hey.ne.jp/~kaleido/index.htm

[7]　埼玉大学ジュニアサイエンス，(2003.8)，後援(日本数学協会，埼玉県，さいたま市)

[8]　C. J. Bradley, A. P. Cracknell: "The mathematical theory of symmetry in solids", Oxford, (1972), pp. 45

(たに・かつひこ／(株)リコー・中央研究所)

たたみかえ折り紙六角形

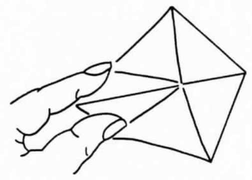
西山 豊

この原稿は日本数学協会第1回年次大会(2003年8月)で研究発表した内容に加筆してまとめたものです．数学は実践することによる楽しみがあるので，これを読まれた方は是非とも試してみてください．

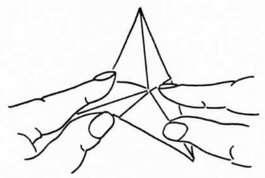
1．裏表のない平面

このパズルはイギリスの数学者アーサー・ストーン(Arthur H. Stone)が1939年に考案したもので，ヘキサフレクサゴン(hexaflexagon)という名前がついている．ヘキサフレクサゴンという名前がなじまないのか，「オリガミ六角形」または「たたみかえ折り紙」と邦訳されているが，これらは皆このパズルのことを言っているのである．

ヘキサフレクサゴンのヘキサ(hexa)とは6のことで，フレクサゴン(flexagon)とはフレキシブル(flexible)なもの，曲げやすいもの，いろいろな形になるものの意味である．フレクサゴンには六角形以外のものもあり，たとえばテトラフレクサゴン(tetraflexagon)は四角形のものだが，理論的にも実践的にも面白いのはヘキサフレクサゴンのほうである．



(1)

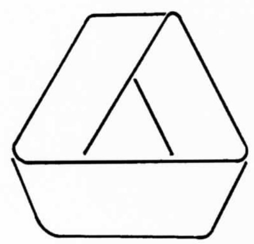


(2)

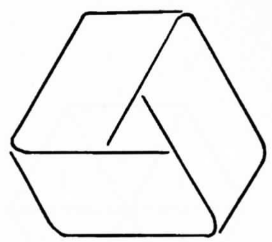
図1　新しい面の出し方

私がこのパズルの面白さを知ったのは1985年で，『数理科学』に掲載された池野信一の記事である([3])．日本になかったパズルかというとそうでもなく，古くからある玩具「ぴょうぶがえ」に類似している．このパズルは紙製のもので六角形のかたちをしている．その六角形は6つの三角形で構成されていて，図1のように親指と人差し指で隣接する2つの三角形をつまむと，真ん中から新しい面が現れてくるのだ．

図2はトポロジー(位相幾何学)でいう裏表のない平面についての説明図である．普通の帯を180度ひねってのりづけしたのがメビウスの帯とよばれるもので，ドイツの天文学者メビウス(A. F. Möbius, 1790-1869)が考案したものである．ひねりの向きは右ねじ，左ねじのどちらの向きでもよく，裏と表の区別がなくなりつながった平面となる．メビウスの帯は180度ひねっているが，ヘキサフレクサゴンは540度ひねってできている．540度とは180度の3倍である．一般に180度の奇数倍ひねってのりづけすると裏表のない平面になり，偶数倍ひねると裏表のある平面になる．図2 (2)において，真ん中の空洞をなくすように紙片の長さを縮めると実際のパズルとなる．



(1)　メビウスの帯
(180度ひねり)



(2)　ヘキサフレクサゴン
(540度ひねり)

図2　裏表のない平面

2．基本の3面折り

さて，ものごとは基本が大切である．ヘキサフレクサゴンの3面折りは基本中の基本であるので，読者はこの3面折りを完全にマスターしてほしい．

一辺が6センチの正三角形を図3 (1)のように横に10個並べる．この程度の図ならコンパスと定規で描けるはずだ．10個の三角形の右端の1つはのりづけのためにあるので，実際は9個の三角形がパズルに関係している．三角形は裏表の2面あるから，$9 \times 2 = 18$で合計18個の三角形があることになる．一方，フレクサゴンの六角形は三角形が6個でできているから，$18 \div 6 = 3$で3面折りのものができることが数字の上からは成り立つ．

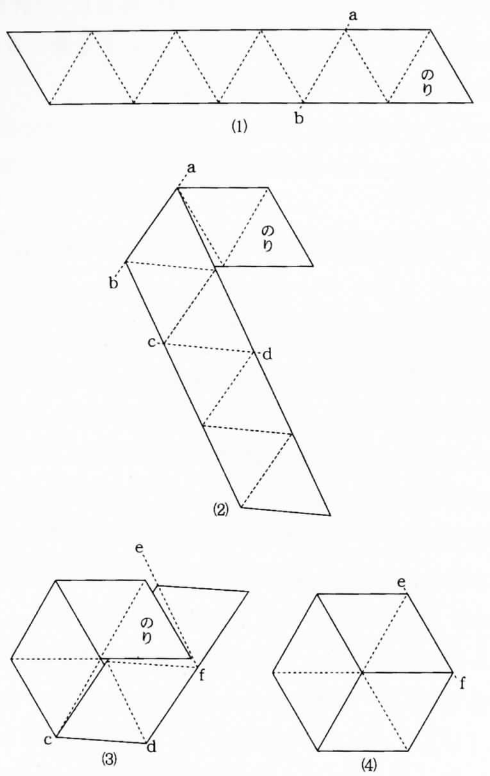


図3　折りたたみの手順(3面折り)

数字の上で勘定が成り立っても，三角形がどういう配置になっていればよいかが肝心であるが，その説明は後述するとして正しい折り方だけを説明しておこう．a−bの線にそって谷折りし(図3 (2))，c−dの線にそって谷折りし(図3 (3))，〈のり〉の下をくぐらせてe−fの線にそって谷折りして，のりづけをする(図3 (4))．谷折りを3回したことになるから180度×3 = 540度ひねったことになる．

のりづけしたヘキサフレクサゴンを図1のように隣接する2つの三角形をつまんでいくと，真ん中から新しい面が自然と現れてくる．もし出てこなかったら，無理に引っ張らずに三角形を1つずらして(中心角で60度)みることだ．それでも出てこないようだったら，作り方が間違っているので図3にしたがってもういちど最初から作り直してほしい．

ヘキサフレクサゴンが正しく動作するかを確認しておこう．そのためには6角形の面に数字を記入していく(図4)．最初の面を「1」とし，つぎに現れた面を「2」，そのつぎに現れた面を「3」とする．これらは1→2→3→1→2→3というように3つの面がサイクリックに現れるのがわかる．

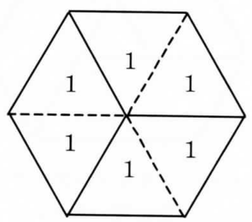


図4　数字を記入

記入した1から3の数字が，実際どのような配置になっているかを知ることは

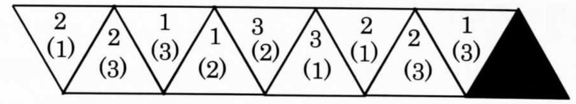


図5　3つの面の関係

興味のあるところだ．いったん作成したヘキサフレクサゴンののりをはがして展開したものが図5である．数字の(1)，(2)，(3)は紙片の裏側に記入された数字を示している．同じ数字は連続した領域にあるのではなく，2つずつのペアが裏表に等間隔に並んで配置しているのだ．また，図1の折りたたみとの関係でいえば，折りたたみの操作が一回につき図5では三角形が2個分ずれることになる．つまり，ヘキサフレクサゴンは1つの細長い帯状の平面をずらしながら見ていることになる．

3．マーチン・ガードナーの型紙より

マーチン・ガードナーの『現代の娯楽数学』にはヘキサフレクサゴンの紹介記事があり，この本の25ページに4面折りから7面折りまでの型紙がのせてある([1])．

この本には型紙の図が掲載されているだけで折り方の説明はなかった．解答がのっていないから自力で解かねばならない．ああでもないこうでもないと失敗を何度も繰り返しながら私はそれらを実現できた．

ヘキサフレクサゴンの多面折り($n \geq 4$)を実現するには面の数が多くなればなるほど，理論だけではなく実際に作成する用紙，作図法などの技術が問題になってくる．最初にパズルを知った1985年ころは，画用紙にコンパスと定規で作図していた．3面折りだけならこれでよいが，面の数が多くなると作図の精度が要求される．鉛筆の芯は0.3ミリ，定規の目盛は1ミリ単位であるので，いくら慎重に作図したとしても手書きによる誤差は，最低0.1ミリはあるだろう．1つの三角形の誤差が0.1ミリであったとしても，三角形が10個になると誤差が蓄積されて1ミリになってしまう．もし12面折りを作成するなら三角形の数が37個になるので，誤差は3.7ミリとなり無視できなくなる．また，当初，画用紙を使っていたが，画用紙は強いようで意外と駄目である．何度も折り曲げているうちに破れてしまうのだ．

このような経験から作図はコンパスと定規をあきらめ，パソコンを使ってVisual Basic言語で作成するようにした．パソコンの場合は手書きの誤差0.1ミリはでてこず，かなり正確である．また画用紙は折り曲げに弱いので，普通のコピー用紙で作ることにした．コピー用紙は薄いが意外と強い．材質の繊維が違うのだろう．また，面を区別するために最初は数字を記入していたが，次第に色分けしたほうがアピールすることに気づき色鉛筆で色を塗るようになるが，コピー用紙が薄くて裏まで色がうつってしまうので，色紙(色つきの折紙)をのりで張ることにした．

4. 基本系列への退化

さて，私が4面折りから8面折りまでをどのようにして実現できたかを説明しよう．型紙について代表的なものを選び図6のように整理した．ただし，8面折りの型紙はJ. マダチーの文献を参考にした([4])．黒色の三角形はのりしろに対応するもので，実際の面の現われには関係しない．

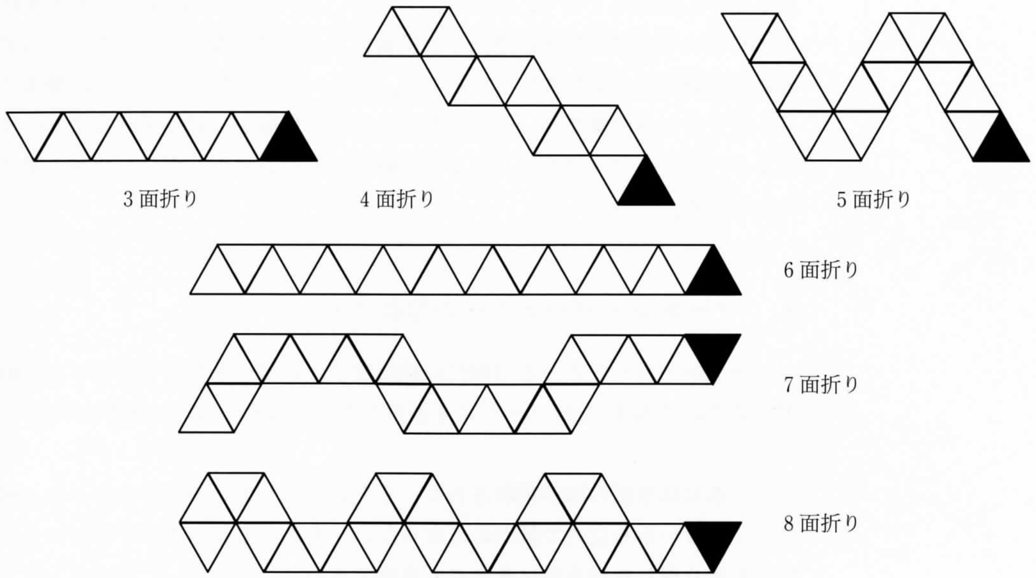


図6 3面折りから8面折りまでの型紙

6面折りは比較的やさしいので，これから始めることにする．3面折りの型紙を2枚横につないでのりづけしたのが6面折りの型紙だ．三角形の数は18個であり，それにのりしろの1枚(黒色)がついた合計19枚である．右ねじの法則で右端から規則的に折っていけば3面折りの型紙と同じになる．この状態から3面折りを適用すれば6面折りが完成する(図7)．

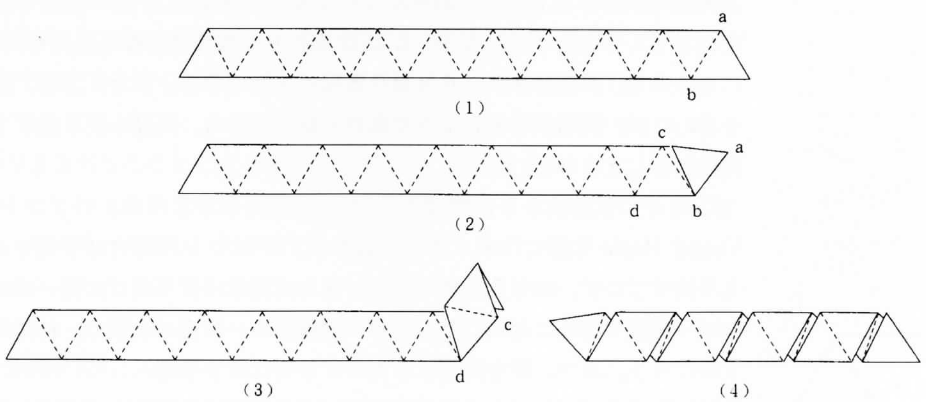


図7 6面折りの手順(6面折り→3面折り)

3面折り，6面折りの型紙のように細長い真っすぐな紙片のことをJ. マダチーはストレート・モデル(straight models)とよんでいる．このストレート・モデルは次式で成り立つ．

$$n = 3\times 2^p, \quad (p \geq 0, 1, 2, \cdots)$$

pに値を代入すると$n = 3, 6, 12, 24, \cdots$となり，3面折り，6面折り，12面折り，24面折りがこの方法で可能だということだ．そして$n = \infty$，つまり面の数が無限のものも理論的には可能だということになる．

これ以外のものは，このストレート・モデルの基本系列に退化するというのが基本である(図8)．4面折りは，3箇所の点線のうち下から順番に右ねじの法則で3回折っていくと3面折りの型紙となる．重なり部分を灰色で示し，その部分は新しい面を構成するので「4」と記入した．(重なり状態)に3面折りを適用すれば4面折りが完成する．7面折りは，3箇所の点線のうち右端から順番に右ねじの法則で3回折っていくと6面折りの型紙となる．重なり部分に数字の「7」を記入した．この6面折りの型紙から3面折りの型紙までもっていき，それに3面折りを適用すればよい．つまり，7面折り→6面折り→3面折りという手順になる．

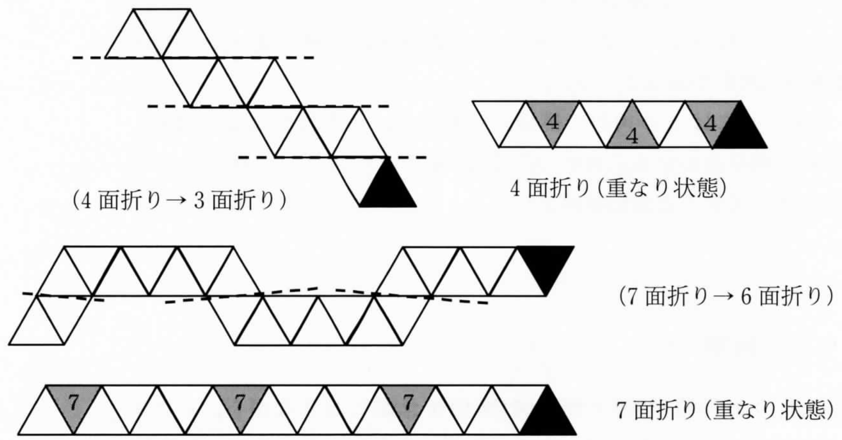


図8 基本系列への退化

5. 推移図

以上の折り方で面の数だけ出てくることを保障するが，面が出てくる順番はどのようになっているのだろうか．それには図9に示す推移図を参考にするとよい．この図は前掲のJ. マダチーの文献を参考にして私が作成したものである．

3面折り($n = 3$)の場合は，推移図が三角形で表現される．三角形の頂点に記

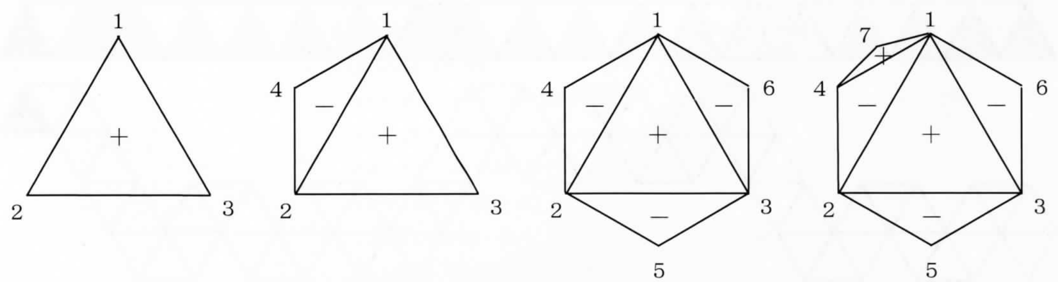


図9 推移図

入した数字の 1,2,3 は面の番号である．三角形の内部にプラス(+)記号を記入したが，これは面の番号が $1\to2\to3$ というように反時計回りに循環するということである．

4 面折り ($n=4$) の場合は，3 面折り ($n=3$) の推移図に頂点 1 から頂点 2 に至る辺に新しい三角形が追加される．それは新しい面の数字 4 が関係する三角形である．この三角形の内部にマイナス (−) 記号を記入したが，これは面の番号が $1\to2\to4$ というように時計回りに循環するということである．4 面折りの場合は $1\to2\to3$ のプラス (+) 循環と，$1\to2\to4$ のマイナス (−) 循環の 2 つが存在するということだ．たとえば，3 から 4 に行くには直接行けないので，$1\to2\to3$ のプラス (+) 循環で $3\to1\to2$ と進み，$1\to2\to4$ のマイナス (−) 循環で $2\to4$ と進み 4 に到達する．この場合，2 は中継点となっている．

6 面折り ($n=6$) の場合は，3 面折り ($n=3$) の推移図に 3 つの三角形が追加される．$1\to2\to3$ のプラス (+) 循環のまわりに，$1\to2\to4$，$2\to3\to5$，$1\to6\to3$ の 3 つのマイナス (−) 循環が存在する．

7 面折り ($n=7$) の場合は，6 面折り ($n=6$) の推移図の外側に $1\to7\to4$ のプラス (+) 循環の三角形が追加される．

このように n 面折りには n 多角形の推移図が対応し，n 多角形は $n-2$ 個の三角形に分割され，隣り合わせる三角形の符号(循環の向き)は互いに異なるのである．推移図を作成しておくと最短経路がわかり，任意の面を出す作業がスムーズになる．

6. 多面折りの一般解

4 面折りと 7 面折りの手順(図 8)と推移図(図 9)を念頭におきながら，$n\geq9$ についてこれが可能かどうか検討していこう．まず，ストレート・モデルの基本系列が存在することは前述したとおりである．

$n=3\times2^p$，$(p\geq0,1,2,\cdots)$ で表されるもので，$n=3,6,12,24,\cdots$ である．これ以外の n については面を重ねあわせて，この系列にのせればいいことになる．新しい型紙を作る場合は(重なり状態)をどうするかがキーポイントとなる．

結論から言うと，$9\leq n\leq24$ のすべての n について型紙が作図でき，それを折って動作確認したところ理論どおりであった．誌面の都合上そのすべての型紙を掲載できないが興味のある方は([6])を参考のこと．これらの型紙は面の数が少ないほうから順番に完成できたわけでもない．簡単なものから済ませていったが，19 面折りは最後まで未解決だった．$n=19$ というのが素数であるので不可能ではないかと悩んだが，試行錯誤するうちに灰色の位置がきまり，その展開図を作ると蛇のような形となった．これで 19 面折りの型紙と折り方が完成した(図 10)．

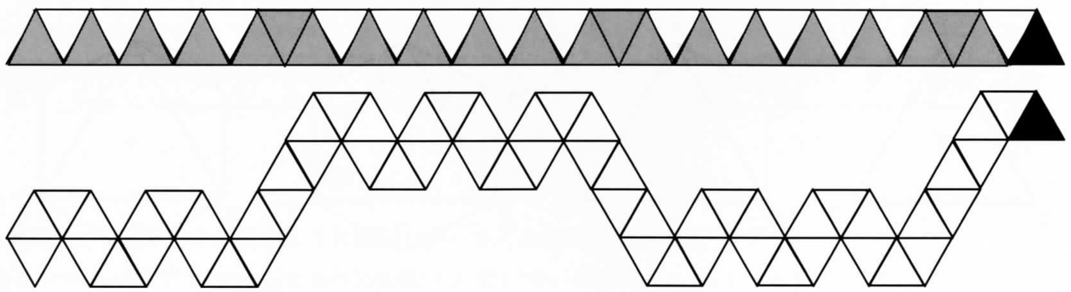


図 10　19 面折りの型紙

7. 万能型紙

以上は，$3\leq n\leq24$ について n 面折りが可能であることを示しただけであって，任意の n について数学的な証明をしたわけでもない．$n\geq25$ についてもこつこつと検討していけば恐らく問題ないであろうが，実際にものを作って確認作業をすることは大変である．普通のコピー用紙を使って確認できるのはこれが限界であると思う．

型紙をコンパスと定規で描くという方法は時間もかかるし誤差もでてくる．そこで，すべての型紙に適用可能な万能型紙を作成した．これは Visual Basic で約 30 行の命令で作成でき(表 1)，RUN すると図 11 のような万能型紙が画面に表示される．これを印刷しコピー機で複製すればよい．n 面折りに必要な型紙をはさみで切り取ればいいのである．

ヘキサフレクサゴンは，まず 3 面折りの現象をみて感動する．そして 4 面折り

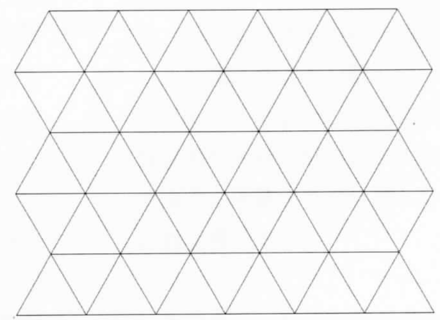


図 11　万能型紙

```
Private Sub Command1_Click( )
Dim x1, y1, x2, y2 As Integer
x0=1500
y0=200
nx=6
ny=6
d=2000
For j=1 To ny
  yb=y0+d*(j-1)* Sqr(3)/2
  k=j Mod 2
  xs=x0+d*1/2*(k-1)
  xe=xs+d*(nx-k)
  Line(xs, yb)-(xe, yb)
  If j=ny Then GoTo last
  For i=1 To nx
    x1=x0+d*((i-1)-1/2)
    y1=yb+d* Sqr(3)/2* k
    x2=x1+d
    y2=y1
    x3=(x1+x2)/2
    y3=yb-d* Sqr(3)/2*(k-1)
    Line(x1, y1)-(x3, y3)
    Line(x2, y2)-(x3, y3)
  Next i
Next j
last:
End Sub
```

表 1　Visual Basic プログラムによる万能型紙の作成

ができるだろうかと考える．4面折りができると5面折りや6面折り，そして任意の n 面折りは可能だろうかと考える．これらの思考の過程は「拡張」，「一般解」，「連続性」，「同値，同型」といった数学で行う手法に似ている．たかがパズルであるが，理論化，体系化するとパズルが立派に見えてくるのだ．基本の3面折りでも感動は十分に伝わるので，このパズルを経験していない読者は，図11を適当な大きさに拡大コピーして是非とも試していただきたい．

●参考文献……………………

[1] M. ガードナー著，金沢養訳「オリガミ六角形」『現代の娯楽数学』白揚社，1960，pp. 13-28

[2] 戸田盛和『おもちゃセミナー』日本評論社，1973，pp. 226-227

[3] 池野信一「たたみかえ折り紙」『別冊：数理科学，「パズル」IV』サイエンス社，1979，pp. 78-82

[4] Joseph S. Madachy, *Madachy's Mathematical Recreations*, Dover, 1979

[5] 西山豊「オリガミ六角形の多面折り」『大阪経大論集』Vol. 50, No. 1, 1999.7, pp. 353-378

[6] 西山豊「ヘキサフレクサゴン(Hexaflexagon)の一般解」『大阪経大論集』Vol. 54, No. 4, 2003.11, pp. 153-173

（にしやま・ゆたか／大阪経済大学）

《形遊び》ブック・ガイド

瀬山士郎

「僕にとって美しい図形とは〈無駄のない形〉もしくは〈一見無駄に見える揺らぎを無駄なく含んだ形〉です．そこには数式と様式しかありません」（菅浩江『永遠の森』早川文庫）

形の本．広く解釈すれば，どんな本でもその範疇に入ってしまいそうだが，ここでは多少なりとも数学に関係がある本を何冊か紹介しよう．今回は折り紙とフラクタルの本は割愛した．

最初に，形というからには図版が多く見ていて楽しい本．

[1] **『かたちと空間』**宮崎興二，朝倉書店

著者宮崎興二は形の科学の第一人者だが，じつは模型作りのベテランでもある．本書は正多面体から始まって，著者が実際につくった模型のカラー写真が満載の，形マニアなら見ているだけで楽しい本．コクセター，フラーという図形科学の大家が序文を寄せている．

[2] **『次元の中の形たち』**戸村浩，日本評論社

雑誌『数学セミナー』に「トムのページ」として連載された記事をまとめた本．著者は数学的な感性にあふれた造形美術家で，多くの作品でシンプルな機構のなかに形の不思議な性質を表現してきた．本書で登場したムーブ・フォルムはすでに形の古典としての地位を獲得している．おそらくは大勢の人がどこかで目にしているに違いない．また，トポロジカル・リングという完全にリンクした切れ目のない輪はとても不思議である．どうやってつくったのかは考えてください．

[3] **『目で見る高次元の世界』**T. F. バンチョフ，東京化学同人

形というと，トポロジー・ガジェットのメビウスの帯やクライン管を思い出す人も多いと思うが，本書はそれらを含めて，4次元空間を解説したユニークな数学書．4次元空間は前の2冊にも出てくるが，やはり数学愛好家の永遠のアイドルである．本書には4次元空間でのトーラスの回転の図などが出てくる．じっと見ていると，トーラスが裏返る様子が分かる（かもしれない）．コンピュータ・グラフィックスを駆使した楽しい本．なお著者には『ハイパーキューブ』というビデオ作品がある．このビデオを見ていると4次元超立体が見えるような気がする．4次元愛好家は必見．

[4] **『トポロジーの絵本』**G. K. フランシス，シュプリンガー・フェアラーク東京

題名からすると，トポロジーの教科書に出てくる奇妙な形の絵を集めた本のようだが，実は図という表現を通して語られるかなり本格的な数学書．もっとも絵本という通り図はたくさん出てくるので，それを眺めるのは結構楽しい．しかし，メビウスの帯，クライン管といったトポロジー定番のガジェットと違い，本書に出てくる形はもう少し数学的な内容に踏み込んでいるので，形だけを見て直ぐに理解するのは難しいかもしれない．異色の数学書である．

もう少し一般的な形の本としては次のものがある．

[5] **『多面体と建築』**宮崎興二，彰国社

[6] **『プラトンと五重塔』**宮崎興二，人文書院

最初の本は副題が「そのなぞとかたち」で，正多面体，準正多面体（本書では半正多面体）から始まって，現代建築の中にさまざまな形をみつける旅行案内である．とても興味深いのは教室の形の分析で，四角形（長方形）が当たり前と思っている教室の形について数値を出して分析し，六角形の教室が子供達に肯定的に捉えられている様子を紹介している．蜂の巣状の学校を想像するだけで楽しいものがある．

もう1冊は副題が「かたちから見た日本文化史」で，日本の伝統的な形を数学的な感覚で見直したもの．勾玉，古墳から始まり，阿倍晴明，多