どうやら，パップスの定理の本質は(ユークリッド平面ではなく)実射影平面の性質にひそんでいるようだ．そして，線分の長さの積の交換法則の本質についても，同様なのだろう．

前節の冒頭で平行線という概念の存在意義についての問いを立てた．前節の「デカルトのかけ算」も本節の「八百屋のかけ算」も線分の長さの基本的な算術であるが，どちらも平行線によって定義されていた．私は前節の問いに，存在意義は「平行線によって線分の長さのかけ算が定義できる」というところにある，と応えたい．

ところで，『数学入門』に「八百屋の計算術」を載せた遠山は，どこまで意図していたのだろうか．さすがに「かけ算の交換法則(パップスの定理)」までは意図していなかったと想像するのだが，……．いずれにせよ，『数学入門』は読み返すたびに発見がある書物である．本節の内容は，執筆のために読み返したときの発見と，その発見について専門書で調べたことをもとにした．遠山が「八百屋の計算術」を載せてくれたおかげで，私の数学の世界が少し広がった．

●連載第５回の参考文献

[5.0] 遠山啓『数学入門』岩波新書，1959 年(上巻)，1960 年(下巻)．

[5.1] 溝上武實『ユークリッド幾何学を考える』ベレ出版，2006 年．

[5.2] 瀬山士郎『幾何学再発見』日本評論社，2005 年．

[5.3] 大田春外『楽しもう射影平面』日本評論社，2016 年．

[5.4] R. ハーツホーン(難波誠訳)『幾何学 I』シュプリンガー・ジャパン，2007 年．

[5.5] 西田吾郎『数，方程式とユークリッド幾何』京都大学学術出版会，2012 年．

(みやなが・のぞみ／日本数学協会幹事)

石井俊全著『ガロア理論の頂を踏む』

A5 判，503 ページ，本体 3000 円，ベレ出版，2013 年 8 月，ISBN 978-4-860643-63-8

ネットでは「中学生にもわかるガロア理論」などの投稿が目立つ．本当だろうか．約 50 年前，ガロアの理論に何度も挑戦して挫折している私は，そんな時代になったのだろうかと思いながら，ガロアの理論に関する新刊を調べていたところ，本会会員の宮永望さんに薦められたのがこの本である．

私が今まで見かけたガロアの理論の専門書とは一風変わった本で，ページ数は約 500 ページもあり分厚いが，分からないところは飛ばしながらも，最後まで読み切れたのは不思議な感じである．書評に入る前に，私とガロアの理論との「つきあい」について触れておこう．

1970 年代の数学科学生はガロアの理論を理解することが夢だった．ところが大学紛争もあり講義がまともに行われず，自分で勉強するしかなく，ほとんどの学生はガロアの理論が未消化に終わっている．私が最初に手にしたのは，つぎの本だった．

エム・ポストニコフ著，日野寛三訳『ガロアの理論』東京図書，1964 年

これは，まったく歯が立たなかった．大学卒業後，知人に紹介されたのがつぎの本で，

矢ヶ部巌著『数Ⅲ方式ガロアの理論：アイデアの変遷を追って』現代数学社，1976 年

これも最後まで読み切ることができなかった．

その後，「ガロアの理論」と名の付く本を何冊か買って読んだが，一向に理解が進まなかった．今から思うと，私にとっての壁は，準同型写像，準同型定理の理解だったと思う．そこで，それを示しておこう．内容はもちろん，表記法にも馴染めなかった．

> [準同型写像]
> 群 G, G' について，G から G' への写像 f がある．G の任意の 2 つの元 x, y について，
> $f(xy) = f(x)f(y)$
> が成り立つとき，f を G から G' への準同型写像という．
> [準同型定理]
> f が群 G から群 G' への準同型写像であるとする．$N = \mathrm{Ker}\, f$ とすると，
> $G/N \cong \mathrm{Im}\, f$

これを大学 3 年生に理解せよといっても無理な話である．準同型定理を理解するには，集合，写像，群，準同型，同型，それに $\mathrm{Im}\, f$ と $\mathrm{Ker}\, f$ を理解していなければならない．当時，予備知識なしで，これを理解できる学生は天才だといわれたが，それは嘘である．

私にとっての理解は，大学 1 年生で学ぶ，集合，写像，置換の初歩で，記憶にあるのは次の定理であり，ガロアの理論へは程遠いものだった．私は「巡回置換は互換の積で表される」ということを「ビールのつぎ方」という短文にしたところ，『数学セミナー』(日本評論社)1983 年 9 月号の表紙に掲載された．

> [置換は互換の積]
> n 次の対称群 S_n の元は互換の積で表される．

大学を卒業して就職したのが日本アイ・ビー・エムというコンピューターの会社であり，数値計算に使う擬似乱数生成のサブルーチンのアルゴリズムに，素数と「原始根」が使われていることを知った．原始根は整数論では常識の数学用語であるが，恥ずかしながら社会に出てから初めて原始

根を知った．そして，フェルマーの小定理を学んだ．

ある雑誌につぎの書評を書く機会があった．その中で，「中国剰余の定理」の面白さを学んだ．そして，これは古代中国の『孫子算経』に記述があることを知った．剰余類は整数論，群論，ガロアの理論すべてに関係する重要な概念である．

吉田武著『素数夜曲：女王の誘惑』海鳴社，1994年

ヒトデの腕はなぜ5本か，棘皮動物の水管系はなぜ五放射相称かを研究しているとき，正五角形の作図問題に興味を持ち，さらにつぎの本の第1章に，19歳の青年ガウスが目ざめて臥床から起き出でようとする刹那に正17角形の作図法を思い付いたとして，彼の日記が紹介されているのを知った．

高木貞治著『近世数学史談』共立出版，1970年

私は，この解説に飽き足らず，つぎの本を読み，ガウスの「f-項周期」(16項周期を8項周期に分解する)というのを学んだ．

倉田令二朗著『ガウス円分方程式論』河合文化教育研究所，1988年

『数学セミナー』日本評論社，2006年6月号の「エレガントな解答をもとむ」欄に出題する機会を与えられた．幾何図形の数え上げに関する問題だったが，ある解答者は「バーンサイドの補題」を使ったエレガントな解答をされた．この補題はコーシー-フロベニウスの補題，ポリアの定理と呼ばれることもあり，群論の結果を使った有用な数え上げ方法である．

私は，バーンサイドの補題を使って，サイコロ(正六面体)を三色で塗り分ける場合は何通りあるかの問題を考えた．そして，サイコロの回転軸と回転群，群論，置換群，同値類などの概念について学んだ．

[バーンサイドの補題]

集合 X に作用する置換群 G があるとき，群 G の要素 g によって不変なものの個数を X^g とするとき，軌道(orbit)の数 $|X/G|$ はつぎの公式で表される．

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$$

このようにして50年間の「下積み生活」の私にはガロアの理論に再挑戦する機が熟していたといえよう．この本を手にしたとき，わからないところは飛ばしながらも，ガロアの理論を最後まで読み切ることができたのだ．

前置きが長くなってしまったが，本書は整数，群，多項式，複素数，体と自己同型写像，根号で表す，の6つの章に分かれていて，それぞれの章ではつぎのような項目が説明されている．

第1章「整数」

ユークリッドの互除法，剰余類，巡回群，群の同型，部分群，群の直積，既約剰余類群，既約剰余類群の構造分析，原始根で生成，原始根の存在証明，$(Z/pZ)^*$ の構造

第2章「群」

二面体群，一般の剰余群，$S(P_6)$，準同型写像，第2同型定理，第3同型定理，対称群 S_n，可解群

第3章「多項式」

対称式，既約多項式，多項式の合同式，$Q[x]/(f(x))$

第4章「複素数」

複素数，複素平面，1の n 乗根，円分多項式，代数学の基本定理，$\Phi(x)$ の既約性の証明

第5章「体と自己同型写像」

$Q(\sqrt{3})$ の対称性，$Q[x]/(f(x)) \cong Q(\alpha)$，$Q(\alpha_1) \cong Q(\alpha_2) \cong \cdots \cong Q(\alpha_n)$，線形代数の補足，最小分解体 $Q(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，中間体，$Q(\alpha, \beta)$，ガロア対応，$Q(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = Q(\theta)$，ガロア拡大体，ガロア対応の証明，中間体がガロア拡大体になる条件

第6章「根号で表す」

円分方程式の可解性，3次方程式の解の公式，ベキ根拡大，4次方程式の解の公式，累巡回拡大体，円分体とガロア群，クンマー拡大，巡回拡大からベキ根拡大へ，ベキ根で解ける方程式の条件，ガロア群が可解群でない方程式

ガロアの理論を理解するには，ここに書かれている約50個の数学用語と概念を理解しておくことが最低条件である．これらの用語をノートに書きだし，

1. 知っている，
2. 聞いたことがあるがあやふやである，
3. まったく知らない，

の3つに分類して整理しておくと，効率よく勉強できる．知っている用語や概念は斜め読みし，あやふやな用語はしっかり読み，まったく知らない用語は一回で理解しようと思わず，根気よく時間をかけて理解していくという心構えでいくとよい．

この本の特徴は，受験参考書の「チャート式」(数研出版)に見られる黒と赤の二色刷りで，読みやすくなっている．一瞬，高校生でも理解できるのかと錯覚を与えるくらいだが，これはガロア理論の専門書である．

また，練習問題と詳しい答えがついているのも特徴である．自分で計算しながら読み進んでいける．従来の他の本のほとんどは，定義と定理，そして証明がほとんどで，わずかに例題が載っていても詳しい解答がなく読者には不親切なものである．この本はそのスタイルを完全に打ち砕いていて，最初から最後まで，具体的な問題を解きながらガロアの理論を理解していくという立場が一貫している．高校数学は問題を解くのが仕事，大学数学は証明を考えるのが仕事といわれているが，大学数学も問題を解くというスタイルが保たれているので，高校数学と大学数学のギャップを感じさせない．

私は，この本でガロアの理論をすべて理解したとはいえないが，全体像がつかめたことは大きな成果だった．今後，未消化に終わっている定理を，1つずつ時間をかけて潰していき，理解を深めていくつもりだ．

学生時代に，エヴァリスト・ガロアの伝記を読んで誤魔化していた私に，ガロアの理論そのものにチャレンジする機会を与えてくださった著者に感謝します．ガロアの理論で挫折した人にはお勧めの本だと思います．

西山 豊(にしやま・ゆたか／大阪経済大学)