エレガントな解答をもとむ（出題）で学んだこと

西山　豊

雑誌『数学セミナー』（日本評論社）に「エレガントな解答をもとむ」というページがあり、何度か出題する機会を与えられましたが、その中で記憶に残るのは、つぎの２題です。2010 年 1 月号の出題 1 と 2011 年 12 月号の出題 2 です。

応募者の多くは、高校から大学レベルの知識を用いてオーソドックスな解答を与えましたが、横浜市・山田正昭さんと静岡市・鈴木丈喜さんは、高度な数式を用いず（中学生程度の知識で）、いとも簡単に解いてしまったのです。今、読みなおしてもこのおふたりには頭が下がる思いです。

数学の証明は、思いもかけぬ方法でなされます。また、特許や手品の種に似ているところがあり、それを知ってしまうと「なんだ、こんなことか」「これなら誰でもできる」と言いたくなりますが、それは解けなかった者の負け惜しみです。証明を最初に考えた人への敬意と尊敬を忘れてはいけません。

数学は小学校から中学校、高校、大学、大学院に進むにつれて理解が深まり、能力に上下関係ができるかのように思われますが、必ずしもそうとは言えません。大学教員のように知識を多く持ちすぎると、「牛刀(ぎゅうとう)をもって鶏(にわとり)を割(さ)く」のように、問題をより複雑にしてしまう傾向があります。

『初等数学』にエレガントな解答を掲載しようかとも考えたのですが、掲載すると皆さまから解く楽しみを奪ってしまうことになりますので、問題を提示するだけにしました。読者の皆さまも一度考えてみてください。数学に自信のある読者は答を絶対に見てはいけません。どうしても考えが及ばず、降参！という読者は、参考文献を見てください。

『数学セミナー』2010 年 1 月号、出題

(1)　正五角形と外接円を描きます．外接円の円周上に任意の点 P を定め，点 P と直近の頂点から反時計まわりに 1 から 5 まで番号をつけます．点 P と各頂点との距離を x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 とするとき，

$$x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4$$

が成り立つことを証明してください（図 1）.

(2)　一般に，奇数の頂点がある正$2n+1$角形では，外接円の円周上の任意の点 P から，奇数番目の頂点との距離の総和は，偶数番目の頂点との距離の総和に等しいことを示してください.

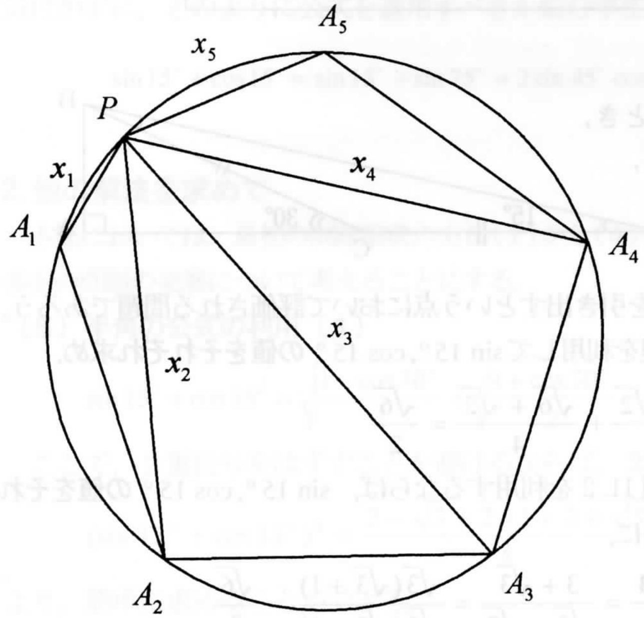
$$x_1 + x_3 + \cdots + x_{2n+1} = x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n}$$

『数学セミナー』2011 年 12 月号、出題

縦と横が$n \times n$のマス目があります。左下隅の開始点 S から右上隅の終了点 G までの最短経路$p \in P$を考えるとき、この経路 p が対角線に出会う回数を$v(p)$とします。ただし、開始点と終了点も対角線上にあるとして回数に含めます。図 2 では、対角線に 5 回出会っていることになります。S から G へのすべての最短経路 P について考えるとき、対角線に出会う総回数を$V(n)$とすると、

$$V(n) = 4^n$$

の関係式が成り立つことが知られています。たとえば、$V(2) = 16, V(3) = 64, V(4) = 256$ です。このことをなるべく高校生程度の知識で証明できないものでしょうか。



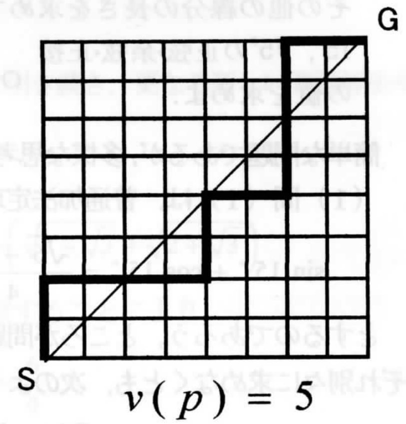


図 1．$x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4$　　図 2．対角線に出会う全回数　$V(n) = 4^n$

参考文献

[1] 西山豊・森原則男「エレガントな解答をもとむ」『数学セミナー』
　出題：2010 年 1 月号、解答・講評：2010 年 4 月号、98-102 ページ

[2] 西山豊「エレガントな解答をもとむ」『数学セミナー』
　出題：2011 年 12 月号、解答・講評：2012 年 3 月号、101-104 ページ

（にしやま・ゆたか／大阪経済大学）

提出日：2014 年 3 月 7 日

Topics of "Elegant Answers are Required"　　Yutaka Nishiyama