即ち，$\tan\frac{k}{n}\pi$ が有理数になる n は$\sin\frac{2k}{n}\pi$，$\cos\frac{2k}{n}\pi$ が共に有理数になる n の中に存在することがわかる。従って，$2k<n$ の下で求めると，定理１，定理５より n が

$\{$ $4k$ の約数または $6k$ の約数 $\}$ かつ $\{$ $4k$ の約数または $n=12k$ または $n=\frac{12}{5}k$ $\}$

であることが必要である。

これは，「n が $4k$ の約数で $2k<n$ である。」ことを意味するが，更にこれは

「$n=4k$」……………（＊）

と同値である。

さて，n が条件（＊）を満たせば，$\tan\frac{k}{n}\pi=\tan\frac{\pi}{4}=1\in Q$ である。

即ち，$\tan\frac{k}{n}\pi\in Q$ よって，次の定理を得る：

（定理６）【高林】k を与えられた自然数とする。この時，自然数 $n\,(>k)$ に対して

$$\tan\frac{k}{n}\pi \text{ が有理数} \iff n=4k \quad \text{i.e.}\ \frac{k}{n}\pi=\frac{\pi}{4}$$

【例３】(1) $k=1$ の時，$\tan\frac{\pi}{n}$ が有理数になる $n\,(>1)$ は４のみである。しかし，$n=1$ の時も $\tan\pi=0$ で有理数だから結局，$n=1,4$ のみである。

(2) $k=2$ の時，$\tan\frac{2}{n}\pi$ が有理数になる $n\,(>2)$ は８のみであるが，$n\leqq 2$ では $n=1$，２の時も有理数だから結局，$n=1,2,8$ のみである。

４，むすび

本稿では三角関数が有理数値をとるための条件を求めたが，基本的なアイデアは文献 [1] によるもので，著者の方にお礼申し上げたい。

参 考 文 献

[1] 雲孝夫，有理数・無理数，大学への数学 1995年11月号，東京出版，56－61.

[2] 一松信＋米田信夫編，数学の問題－エレガントな解答を求む－第３集，日本評論社，1988，74－75，82－83.

[4] 平松豊一，最良近似の問題，啓林・高数編，No.196，啓林館，1985，1－5.

[5] 柳田五夫，チェビシェフの多項式について，数研通信 17，数研出版，1992，6－11.

[6] Ｐ．フランクル／前原潤，幾何学の散歩道，共立出版，1991，10－11.

[7] E.Lozansky / C.Rousseau，Winning Solutions，Springer－Verlag，New York，1996，p.31.

[8] 白坂繁，三角形の辺の長さ，面積，角について，早川学而先生傘寿記念文集「学而有朋」，1990，147－156.

（1998年12月2日提出）

（勤務先）　茨城県立水戸工業高等学校

（自宅住所）〒310－0836 茨城県水戸市元吉田町2621－10

オリガミ六角形

西山　豊

はじめに

私がオリガミ六角形というパズルの面白さを知ったのは、雑誌『数理科学』の池野信一の記事である（文献(1))。ＩＢＭから大阪経済大学に転任した 1985 年頃で、ゼミの教材として何か適当なものはないかと物色していたときである。

これは、正六角形の形をした折り紙で、たたみ変えていくと次々と新しい面が出てくる不思議なパズルである。日本古来からある「びょうぶがえ」などのオモチャに類似している。

私はゼミでこのパズルを取り上げている。早い時期に数学をエスケープした文科系大学生に対して、数学の面白さをなんとか理解してもらおうという目論見である。ゼミ生たちは、オリガミ六角形の３面に色を塗ったり、マンガを描いたりして楽しんでいる。

ゼミで何度か試した後、雑誌『ＢＡＳＩＣ数学』の連載記事の一つとしてこれを紹介した（文献(2))。この記事は拙著『人とヒトデとサッカーボール』（三省堂）の中に収録している。爾来 10 数年たつが、その感動と新鮮さはいまだ色あせることはない。

このパズルは、ゼミ以外でも使っている。1998 年、鹿児島大学で夏期集中講義を行った際に、時間があまったので、普通の３面折りだけでなく４面折りに挑戦してもらうことにした。前掲書（文献(2)）には４面折りの展開図を示すだけで、この時点では私自身、４面折りの方法を熟知していたわけではなかった。学生に４面折りを催促され、冷や汗を掻きながら何とか４面折りを完成させたが、完全なプロセスを理解していなかった。

夏期集中講義も終わり、書店で目にした雑誌に、オリガミ六角形の紹介があった。そこには何と６面折りの方法が掲載されていたのだ。

６面折りの型紙は、後で説明するが横に細長いので、紙をノリでつなぐようにしなければならない。ただし、ポスター用紙から細長い帯状の型紙を作る場合は、ノリでつながなくてよい。解説どおりにおりたたんでいくと、６面がすべて出てくるのだった。

３面折り、４面折り、６面折りができるようになると、当然のことながら、それ以外の多面折りのことが気になる。５面折りや７面折りはできないだろうかという疑問が沸いてくる。そして、もし、それが見つかっていなかったら、私の研究課題の一つとして登録できるのではという期待がもてる。

その年の夏休みは、オリガミ六角形の多面折りのことで頭がいっぱいだった。そして、この苦悩の旅は意外な結末を迎えることになる。私の、研究への期待を無残に裏切るかのように、このパズルは 1930 年代の末に数学の一つの分野として確立されたものであり、折り方のすべてが研究し尽くされていたのである。

そこで、多面折りの新しい発見は断念し、すでに見つかっている折り方がどういう仕組みになっているかを調査し、それを実行することに専念するよう方針を変更した。

多面折り解明の作業は、そう単純にはいかなかった。折り方のプロセスだけでなく、多面折りの場合は面数が多くなればなるほど紙の重なりが多くなり、それだけ精度のよいものを作っておかねばならないということだった。結局は、ＢＡＳＩＣ言語の作図機能を使い、パソコンで作図することになった。

基本の３面折り

オリガミ六角形は３面折りが基本であるので、この３面折りを完全にマスターしておくこと。図１にしたがって３面折りの手順を説明しよう。

３面折りの型紙を図１(1)のように置き、ａ－ｂの線に沿って谷折りする（谷折りとは、手前に折ることである）。すると、図１(2)になる。つぎに、ｃ－ｄの線に沿って谷折りすると、図１(3)になる。このとき、「のり」と書いた部分は手前にくるようにしておくこと。そして、ｅ－ｆの線に沿って谷折りしてノリづけすれば完成である（図１(4)）。

ここで重要なことは、三角形の要素を３つづつとばして谷折りしていくことは、帯を 180 度×３回ひねっていることに対応していることである。

おりたたみの操作に入る前に、オリガミ六角形が上手く作動するように、よく折り曲げて操作しやすくしておくこと。そして、できあがったオリガミ六角形が、ほんとうに３面とも出てくるのか確認しておこう。

新しい面の出し方は、図２のように行う。

左手の親指と人差し指でオリガミ六角形が山折りになるようにつまむように持つ(1)。そして、右手の親指と人差し指でもつまむように持つ(2)。

真上から見ると中心角が120度ずつになっている(3)。すると、その中心から新しい面が自動的に出てきて(4)、それを押し広げて操作は完了する(5)。

4面以上の折り方

オリガミ六角形は、＜3面折り＞が有名だが4面以上の折り方はないのだろうか。M.ｶﾞｰﾄﾞﾅｰの文献にそのすべてが掲載されている（文献(3))。

これにしたがい、ＢＡＳＩＣ言語で型紙を作図したのが図3である。読者は、この図を適当な大きさに拡大コピーすれば、折り紙六角形の多面折りを楽しむことができる。（図3）

＜4面折り＞と＜5面折り＞は読者のために解答を載せないことにしよう。

＜6面折り＞について説明する（図4）。

6面折りの型紙を図4(1)のように置く。a－bの線に沿って谷折りし(1)、c－dの線に沿って谷折りする(2)。このような操作は単純であるので途中の経過は省略するとして、最終的に図4(4)の状態までに持っていく。これは3面折りの型紙（図1(1))と同じであるので、これから先は3面折りのプロセスに入ることになる。

境界線はよく折り曲げて操作しやすくしておくこと。6面折り以上は紙の重なりが多いので、すべての面がスムーズに出るように紙にクセをつけておくことが大事である。

＜7面折り＞について説明しよう（図5）。

7面折りの型紙を図5(1)のように置く。そして、a－bの線に沿って山折りし、c－dの線に沿って谷折りし(2)、e－fの線に沿って山折りすると(3)、図9(4)の状態になる。これは、6面折りの最初の状態（図4(1))と同じであるので、ここではいったん6面折りのプロセスを実行する。そして、3面折りのプロセスを実行すれば、7面折りは完成する。

メビウスの帯との関係

オリガミ六角形の歴史は1939年の秋に始まる。

アーサー・H・ストウンというイギリスの23歳の大学生がプリンストン大学に留学中に発見したという。アメリカ版のノートはイギリス版のものより少し大きい。そこで、1インチ幅に切り取った紙の帯を折りたたんでいるうちに、オリガミ六角形を偶然発見したという。

日本でもオリガミ六角形と似たようなものがないわけでもない。

戸田盛和は「かくれびょうぶ」の機構を説明している（文献(4)）。さらに、メビウスの帯とヘキサフレクサゴンの関係などを解説している。

メビウスの帯は、裏表のない平面として有名であるが、裏表のない平面はメビウスの帯だけとは限らない。帯のひねりを180度の奇数倍としたとき、裏表のない平面になるのである。メビウスの帯は、ひねりを180度、ヘキサフレクサゴンは、ひねりを180度×3＝540度としたものである。2つの違いを図11に示しておく。

ひねりを540度にしたときはじめてオリガミ六角形が可能であり、メビウスの帯ではオリガミ六角形とはならない。（図6）

六角形ではなく四角形をたたみ変えのパズルとした、オリガミ四角形というのがある。これは、M．ガードナーの本に紹介されている。池野信一は、『数理科学』にこのことを紹介し（文献(1))、『数学セミナー』には「10面折り紙4角形」というのを発表している（文献(5)）。オリガミ四角形の10面折りの方法を説明しているのだ。私も、この記事にしたがって、10面折りのオリガミ四角形を楽しんだが、パズルとしてはオリガミ六角形のほうがすばらしいように思う。

たかが、パズルひとつでこれだけ多くの数学者の心をとりこにするとは、オリガミ六角形のすばらしさにいまさらながら感嘆するのであった。

参考文献

(1) 池野信一「たたみかえ折り紙」『別冊：数理科学、「パズル」Ⅳ』サイエンス社、1979年
(2) 西山豊「折り紙六角形」『ＢＡＳＩＣ数学』現代数学社、1990年12月号
(3) M．ガードナー『現代の娯楽数学』白揚社、1960年
(4) 戸田盛和『おもちゃセミナー』日本評論社、1973年
(5) 池野信一「10面折り紙4角形」『数学セミナー』日本評論社、1974年4月号

（大阪経済大学
〒533-8533 大阪市東淀川区大隅2-2-8）

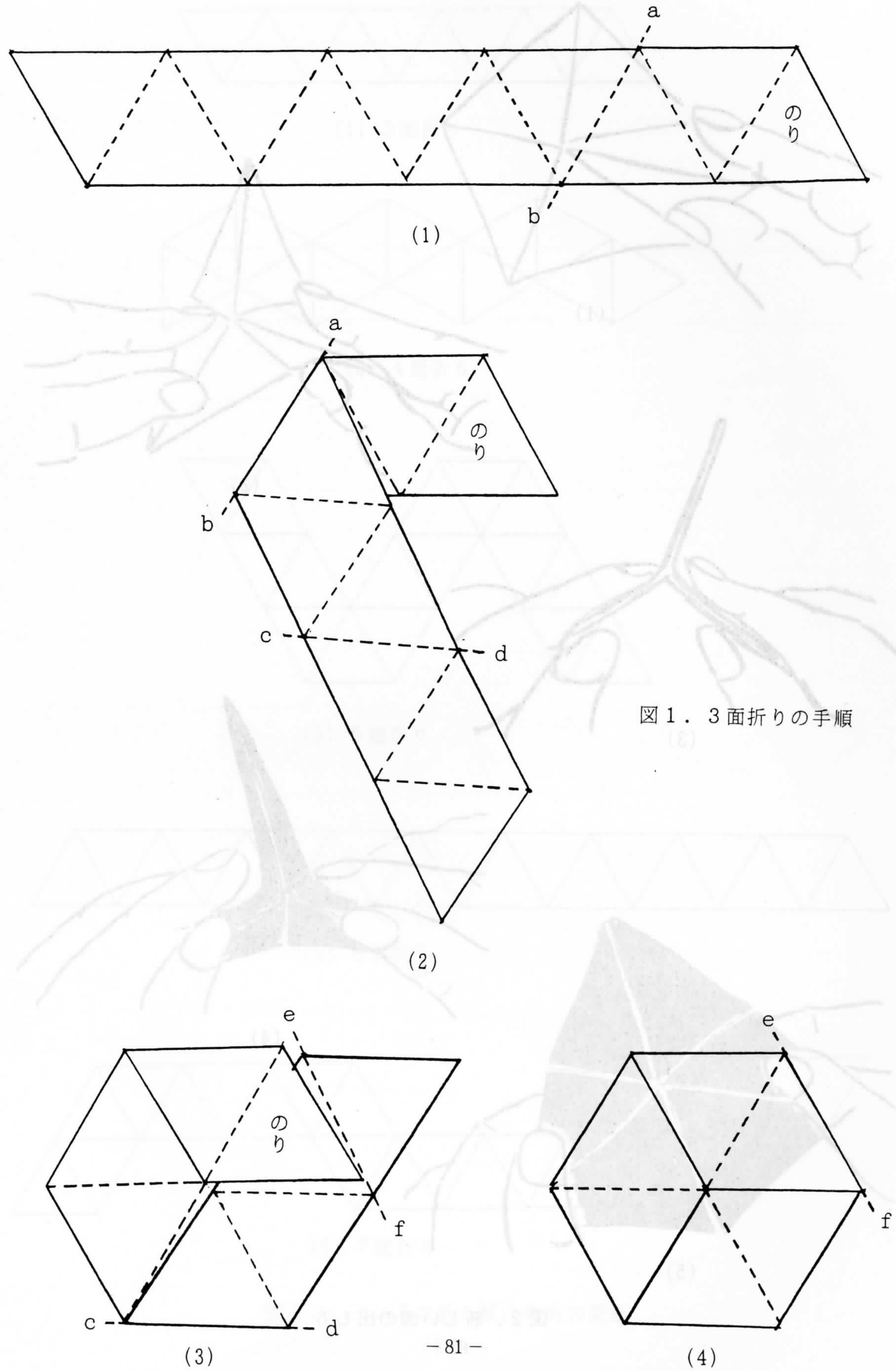
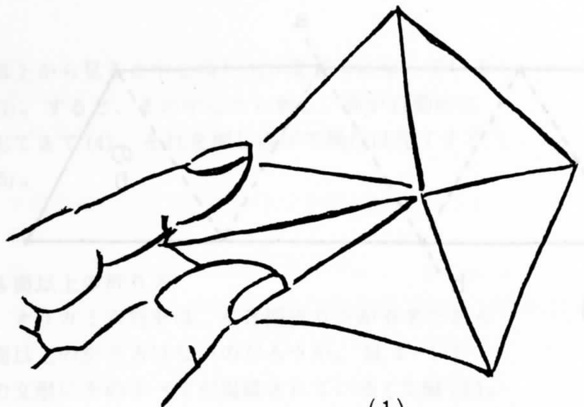
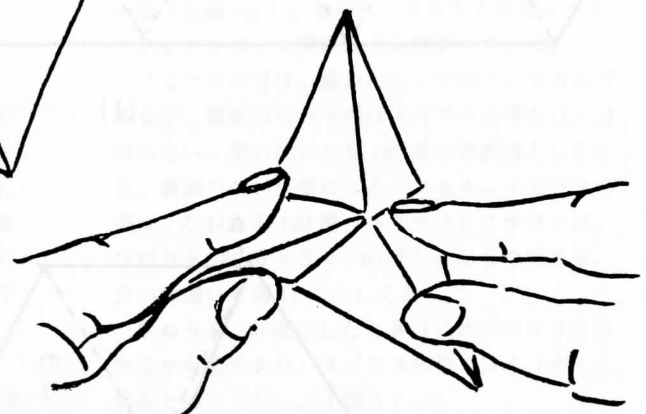


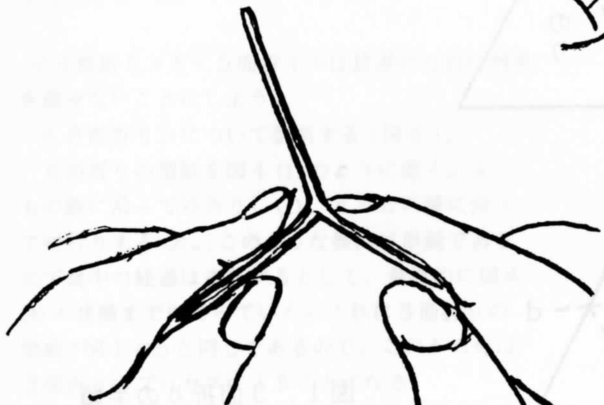
図1．3面折りの手順



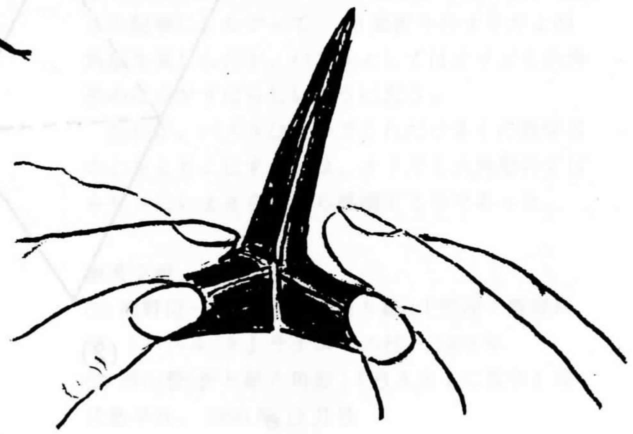
(1)



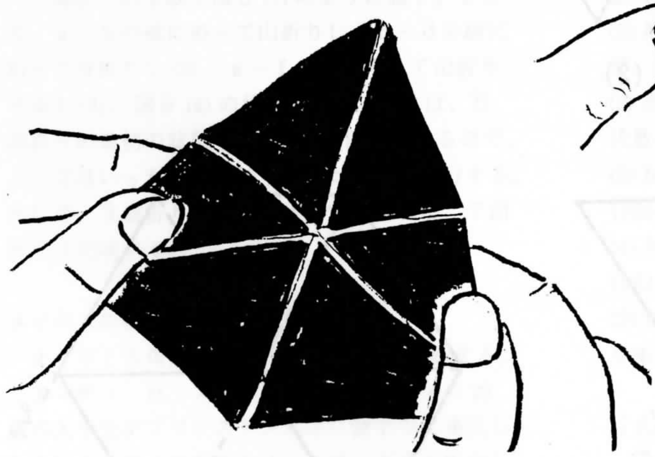
(2)



(3)

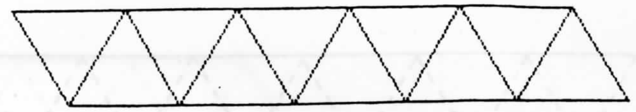


(4)

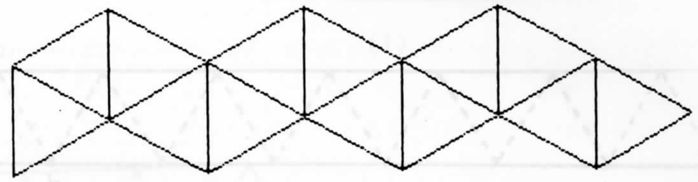


(5)

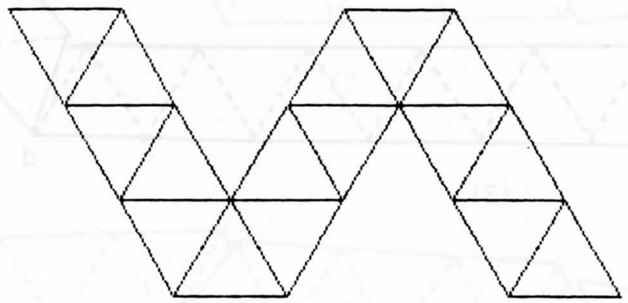
図２．新しい面の出し方



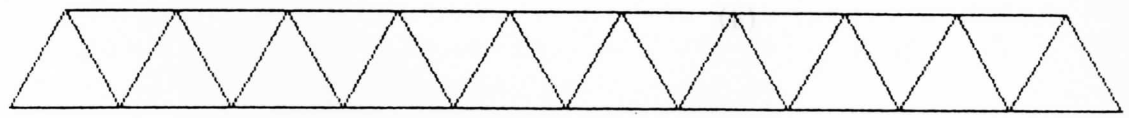
(1) ３面折り



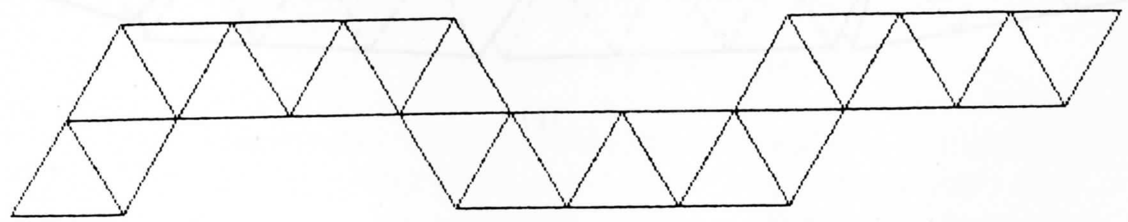
(2) ４面折り



(3) ５面折り



(4) ６面折り



(5) ７面折り

図３．いろいろな折り紙六角形の型紙

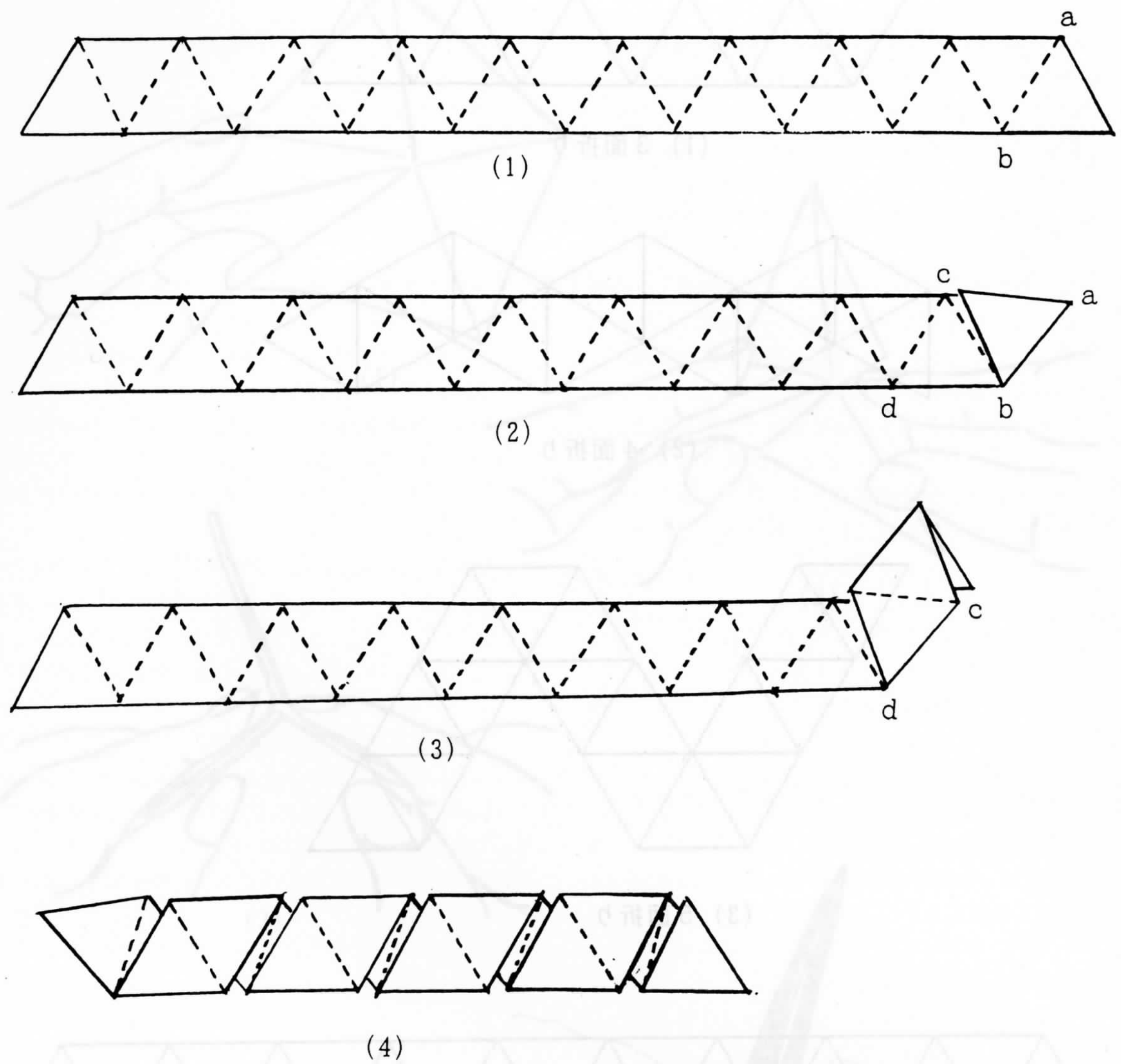


図4．6面折りの手順

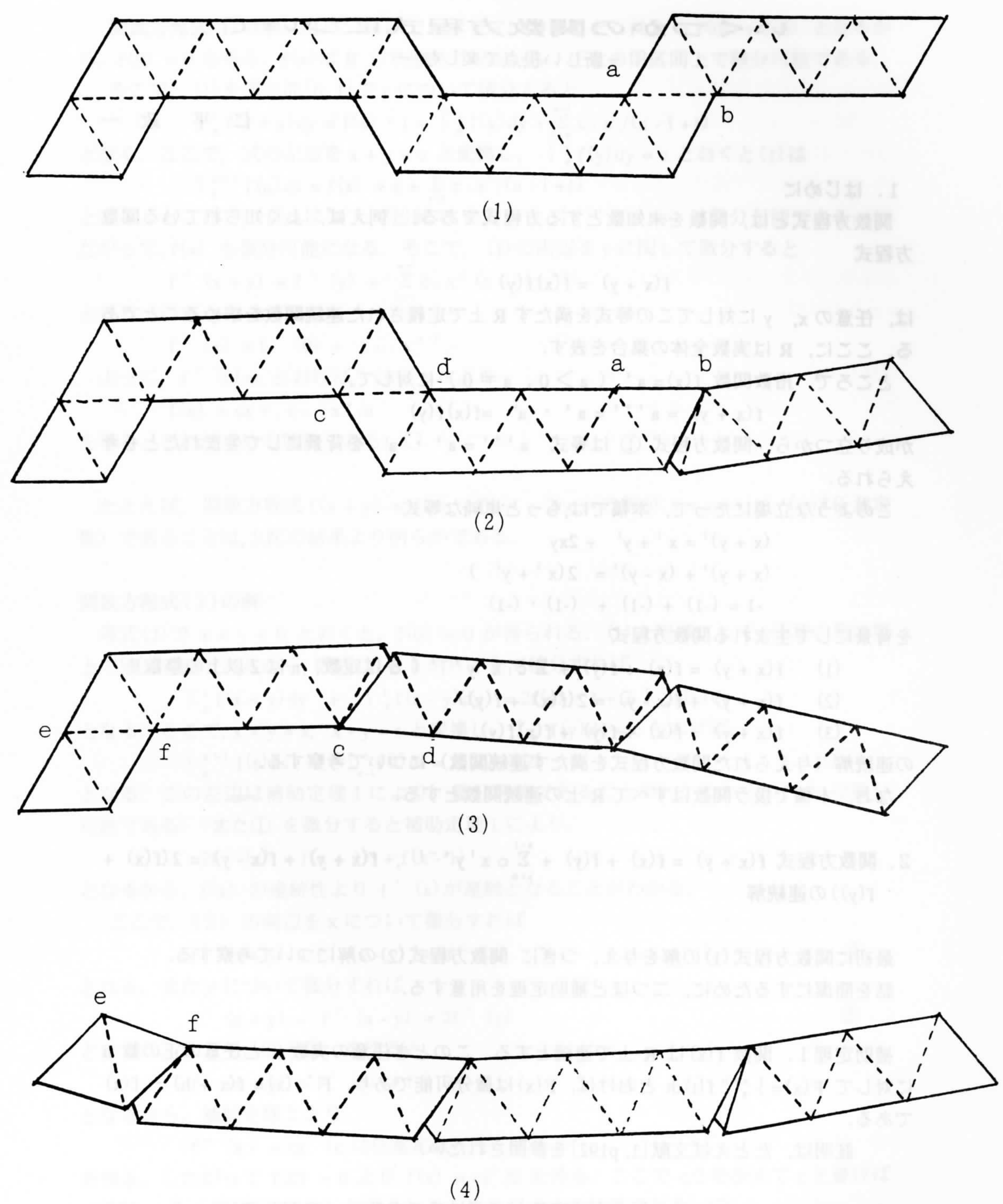
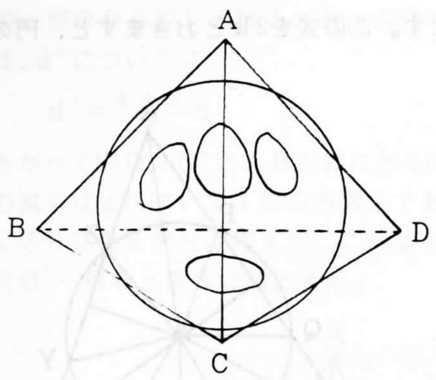
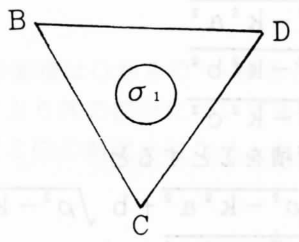


図5．7面折りの手順

（6ページに続く）

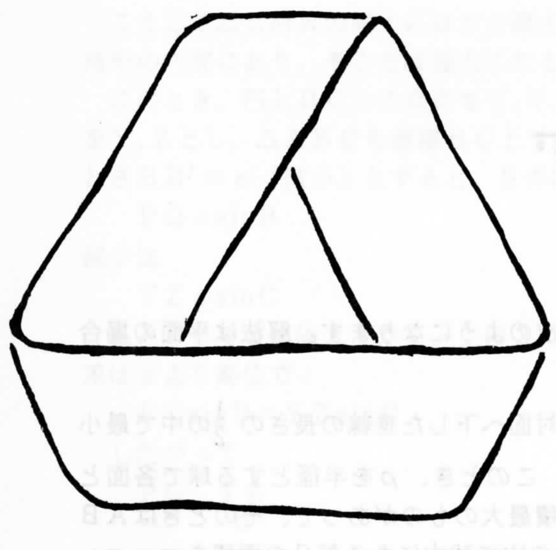




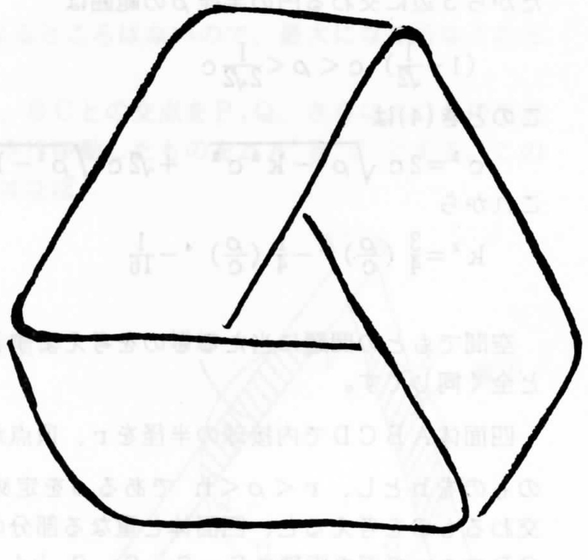
$S_1=\triangle BCD$

H.11.3.12.　　（名古屋大学名誉教授　〒467-0005 名古屋市瑞穂区石川町４の７）

(85ペ-ジから続く)



(1) メビウスの帯
(180度ひねり)



(2) オリガミ六角形
(540度ひねり)

図６．裏表のない平面

落ち穂拾い〔２〕

中澤貞治

前号の続きです。

$f(x)=x^2+2ax+b$ （a,bは整数で $a^2\neq b$）　　　　　　　　$\cdots\cdots(1)$

がxの整数値に対して、４乗数（整数の４乗）になる場合の考察です。

(i) $D_1=a^2-b>0$ の場合。

$D_1=st$ に対して、$m=\dfrac{s+t}{2}$，$n=\dfrac{s-t}{2}$ とおきます。

(ii) $D_2=b-a^2>0$ の場合。

$D_2=st$ に対して、$m=\dfrac{s-t}{2}$，$n=\dfrac{s+t}{2}$ とおきます。

（ただし、s,tは正の整数で $s\geqq t$）

すると、(i),(ii)において

$f(-a\pm m)=n^2$

が成り立ちます。ここで

$n=c^2$　（cは正の整数）

となれば

$f(-a\pm m)=n^4$　　　　　　　　$\cdots\cdots(2)$

となり、４乗数が得られます。なお、(2)を成り立たせるmの個数が3個以上でなければつまりません。

(i)の場合　例(1)　$D_1=1008$

s	t	m	n	c
168	6	87	9^2	9
84	12	48	6^2	6
42	24	33	3^2	3
36	28	32	2^2	2

さて、ここで、$D_1=a^2-b=1008$ となるa,bの組は無数に多く存在します。例えば

(ｱ) $a=32,\ b=16$　　(ｲ) $a=33,\ b=81$

(ｳ) $a=30,\ b=-108$　　(ｴ) $a=27,\ b=-279$

などです。これらによって、2次式(1)を作れば

(ｱ) $f(x)=x^2+64x+16$　　(ｲ) $f(x)=x^2+66x+81$

(ｳ) $f(x)=x^2+60x-108$　　(ｴ) $f(x)=x^2+54x-279$

です。ところがどうでしょう。(ｱ)のxの代わりに、$x-1$ とすれば(ｲ)、$x-2$ とすれば(ｳ)、$x-5$ とすれば(ｴ)となります。

このことから、それぞれの$f(x)$は、xの値が変わっても、それのとる４乗数は全く同じであることが判ったわけです。したがって、a，bの組が無数に多くあっても、その一組で代表させておけばよいのです。以後同様です。上では(ｱ)を採用します。(2)によって

$f(0)=f(-64)=2^4$　，$f(1)=f(-65)=3^4$

$f(16)=f(-80)=6^4$　，$f(55)=f(-119)=9^4$