不動点を図で見せる

西山　豊

●折紙をそろえる

いま，図１に示すように同じ大きさの２枚の折紙がアトランダムに置かれています。これらを重ね合わせることを考えてみましょう。折紙がない場合はＢ５判のコピー用紙２枚を使ってください。

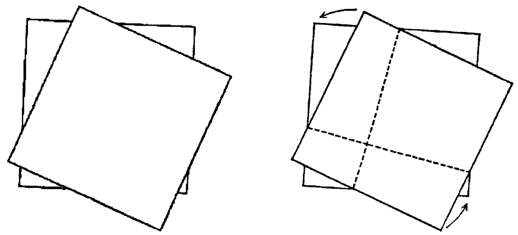

図１　　図２　不動点

数学的な表現をすれば回転移動をし，そのあと平行移動をする，または平行移動をしてから回転移動をすることで重ね合わせることができます。日常生活ではこのような面倒なことはしませんが，合同な図形は平行移動と回転移動，または対称移動を組み合わせることによって重ね合わされるということです。

同じ図形の移動のことを合同変換といいます。平行移動と回転移動の２つの操作が必要だといいましたが，ある特別な点を見つければ１つの回転移動だけで十分で，この点のことを不動点といいます。

さて，この不動点を求めるための作図法は，ユークリッド幾何学によれば移動した頂点間の垂直２等分線を２本引くことによって求めることができますが，証明は省略します。

もっと効率よくエレガントに不動点を作図できないものでしょうか。私は図２に示すように用紙の上に２本の直線を引いてみました。そしてその交点をコンパスの針で押さえ上の用紙を回転させてみました。すると２枚の正方形はぴったりと重なったのです。

図２に示した私の作図法はコンパスを使わないところが最大の特徴で，２本の補助線の交点がなぜ不動点になっているのかの証明は，参考文献(1)にのせています。

●ランダム・ドット・パターン

不動点を作図するエレガントな方法を図２に示しましたが，どうして私がこの方法を発見できたのか説明しておきましょう。

不動点の存在については，つぎのブラウワーの不動点定理が有名です。空間XからX自身への写像fに対して $f(x)=x$ を満たす点$x\in X$をfの不動点といいます。そして，任意の連続写像fは，少なくとも１つの不動点をもちます。

1980年６月号の『日経サイエンス』にジャール・ウォーカーの興味ある記事が掲載されていましたが，私はこの記事に触発されて，ランダム・ドット・パターンを作ってみました。１辺が20cmの正方形内に，2000個の点を散りばめました。各点の（x，y）座標はコンピュータで乱数を発生させることで求め，その座標値をもとにプロッターで作図しました。無秩序に並んだ点群のことをランダム・ドット・パターンと呼んでいます（図３）。

これを透明なビニール紙，たとえばOHP用のフィルムに焼き付け，それをもとのパターンの上に重ね合わせます。上のフィルムを少し回転させるとどうでしょう。無秩序に並んだ点群の中から一瞬，同心円が浮かび上がってきたのです（図４）。同心円は１つできます。そして必ず１つ

です。同心円の中心に指をのせてフィルムを逆回転すれば，２つのパターンは完全に一致しました。つまり同心円の中心は回転を施した中心軸であり不動点でした。

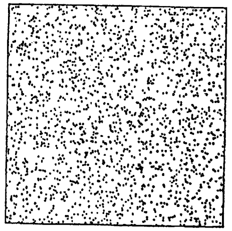

図３　ランダム・ドット・パターン

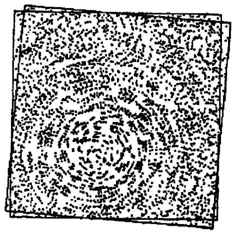

図４　同心円が見える

このパターンを眺めていると，同心円の中心が２直線の交点と一致することに気づいたのです。ところで，このような同心円が１つ，つまり不動点が見えるためにはどうして点群がランダムに配置されていなければならないのでしょうか。

その理由を説明するために点群が規則正しく配置されたレギュラー・ドット・パターンなるものを作ってみました（図５）。レギュラー・ドット・パターンをOHP用のフィルムに焼き付け，それを図案の上に重ね，フィルムを少し回転させました。この場合はいくつもの同心円が見えます。さらにフィルムの回転角度を大きくすれば，同心円の半径は小さくなるとともに同心円の個数が増えていきます（図６）。

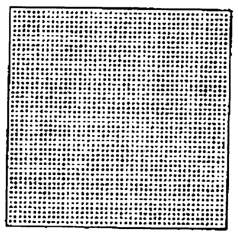

図５　レギュラー・ドット・パターン

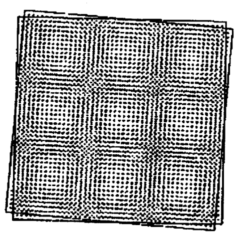

図６　いくつもの同心円

●相似変換およびアフィン変換の不動点

不動点を求める図２の方法は，相似変換やアフィン変換においても適用できます。相似変換の場合は森原則男氏が，アフィン変換の場合は小島誠氏がそのことを証明しました。詳しくは参考文献(2)〜(4)を参照してください。相似変換やアフィン変換（一般の１次変換）の場合のランダム・ドット・パターンの作成方法についても説明してあります。

同心円の見え方は，合同変換と相似変換では少し異なります。相似変換の場合はらせん渦や放射状の模様が見えます（図７，８）。また，アフィン変換の場合はもっと複雑な模様となり，不動直線というものを見ることができます。

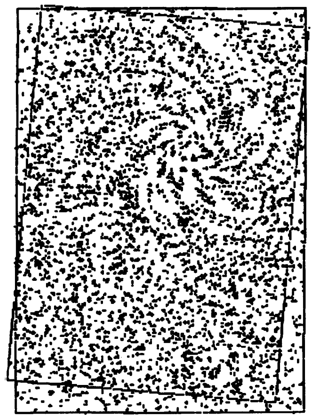

図７　らせん渦の模様

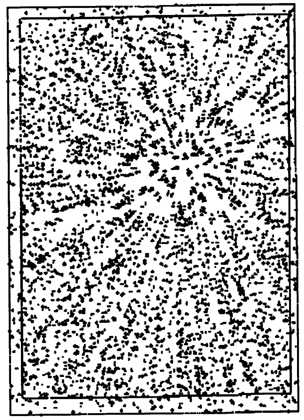

図８　放射状の模様

●ランダム・ドット・パターンの作成方法

最近はパソコンがかなり普及しているので，プログラムでランダム・ドット・パターンを簡単に作成することができます。ここでは，Visual BASIC言語を用いた作成方法を説明しましょう。乱数を発生させるためには，組込み関数Rndを用います。Rndは，（０，１）区間の一様乱数を

自動的に計算してくれます。正方形の大きさを適当に決め，乱数を掛け合わせれば（x，y）座標が求まります。この場合は，正方形のサイズがwx＝8000，wy＝8000で，X，Yに座標が求まります。

ドットを描かせるには，少し大きめの点がよいので，「＋」（プラス記号）をLine文で作成し，点群の数は2000個としました。命令は全体でわずか14行で簡単に作れるので，読者のみなさん，確かめてください。

```
Private Sub Command1_Click()
wx = 8000
wy = 8000
sx = 100
sy = 100
Line (sx, sy)-(wx + sx, wy + sy), , B
For i = 1 To 2000
X = Rnd * wx + sx
Y = Rnd * wy + sy
d = 30
Line (X - d, Y)-(X + d, Y)
Line (X, Y - d)-(X, Y + d)
Next i
End Sub
```

＜参考文献＞
⑴西山豊「折紙をそろえる」『数学セミナー』日本評論社，1982. 2
⑵西山豊「不動点を見せる」『数学セミナー』日本評論社，2002. 2
⑶西山豊「アフィン変換による不動点」『理系への数学』現代数学社，2002. 9
⑷小島誠「１次変換の描く２次曲線」『数学セミナー』日本評論社，2003. 5

（大阪経済大学教授）

柔らかい図形の柔らかい見方

瀬山　士郎

普通，中学校では図形をきちんとした形として扱う。ユークリッド幾何では合同な図形は同じものと考えて，合同な図形に共通な性質を研究する。実際は合同より相似のほうが大切で，中学校で学ぶ図形の性質は基本的には相似な図形に共通な性質である。つまり，長さを問題にしないということである。中学校で本質的に大切な幾何の定理は「中点連結定理」と「ピタゴラスの定理」だが，どちらも図形の形には依存しない性質である。もちろん，そうだからこそ，生徒たちがそれぞれノートに形の違った三角形，直角三角形を描いてもきちんとコミュニケーションがとれるわけだ。

ところで幾何学には他にもいろいろな視点がある。たとえば，アフィン幾何では，比例に関係した性質だけを扱う。中点連結定理は実際はアフィン幾何の定理だから，それなりの扱い方もある。具体的に東京のある私立中学でのアフィン幾何の実践例があるが，ここでは紙面の都合上説明は省略する。あるいは射影幾何では点の順序関係を扱う。

そのような様々な視点の１つにトポロジカルな視点がある。トポロジー，日本語では位相幾何学というが，これは連続変形で不変な図形の性質を調べるという幾何学である。俗にゴム膜上の幾何学として知られているが，たとえば，まったくフレキシブルなゴム膜上に描かれた図形をグニャグニャと変形して得られる図形に共通している性質を研究する。こんなに自由に変形して不変な性質があるのかと思われるかもしれないが，たとえば，ゴム膜面上に描かれた円周が，ゴム膜を円周の内部と外