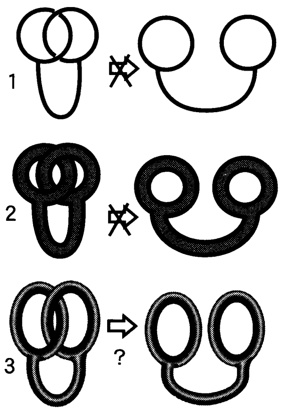
しくて，100万ドルの懸賞がかかっていました。最近ペレルマンがやっと証明したのですが，その100万ドルも，フィールズ賞も拒否してさらに話題を呼びました（「数学者は真理を追究することが楽しいので，富や名声は目的ではない」という意気を感じます）。

●なぜ低次元が難しいかもパズルでわかる

さて，普通は次元が低いほどやさしいのに，次元が低くなるとなぜ面倒かというのは，次のパズルで見ることができます（これも以前やりましたね）。図の１～３はすべて伸び縮みする可塑性の材質でできているとする。１は外せません。これから２も外せないのでしたね。ところが３だけは外れます。

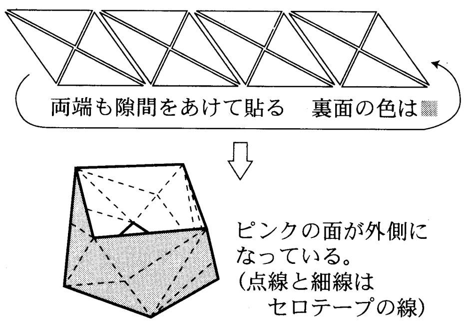


上の図の３の場合だけ違うのは，３の次元が高いからです。次元が高くなると，自由度が高くなって，場合によっては簡単になるということなのです。ポアンカレ予想もそれがきいてきます。しかも，そこでは「結び目」が解けるかどうかが絡んできます。

●遊びの活動から得られたこと

この出前授業をする中で，生徒や受講者などから得られることはたくさんあるので，やめられないのです。以下，ほんの一例をあげます。

裏返しパズルは，それを見た染谷淳一郎氏がすぐ，ひし形４個の形を作ってきてくれました。ちょっと変化するだけでこんなに違うのかとビックリするほどです。



（47ページにつづく）

（埼玉大学経済学部教授）

❶ 不思議な数６１７４

西山　豊

●カプレカー操作

計算することは，忍耐だろうか楽しみだろうか。算数が嫌いな子どもにとって計算ドリルは忍耐以外の何物でもない。でも，遊びや楽しみを伴う計算であれば算数嫌いな生徒たちの気持ちを変えることになるかもしれない。

6174は実に不思議な数である。どんな数であるかを説明する前に簡単な計算をしていただこう。まず４桁の数を１つ決める。その場合，1111や2222などのように各桁がすべて同じものは除くことにする。例えば，今年の年2008としよう。４桁の数を構成する４個の数字を並べ変えて一番大きい数と，一番小さい数を作る。４桁にならない場合は左側に０を埋めて４桁にする。2008の場合は8200と0028である。そこで，この最大数と最小数の差をとると，

$$8200-0028=8172$$

になる。このような操作をカプレカー操作という。名前の由来はこの数を発見したインドの数学者，D. R. カプレカー（1949年）による[1]。新しくできた数8172に対してこの操作を繰り返すと，

$8721-1278=7443$	$7443-3447=3996$	$9963-3699=6264$
$6642-2466=4176$	$7641-1467=6174$	$7641-1467=6174$

になる。

数が6174に到達すると，この数が繰り返される。つまり6174で循環するのだ。そこで，この数を核と呼ぶことにする。どんな数から始めてもよい。必ず6174の核に到達するのである。疑うなら別の数でやってみよう。1789は次のようになる。

$9871-1789=8082$	$8820-0288=8532$	$8532-2358=6174$

2008はカプレカー操作を６回で，1789は３回で6174に到達した。これらはすべての４桁の数に対して成り立つのだ。不思議だろう。小学生にとっては４桁の数の引き算の練習になり，なぜそうなるのかの理由を考えると，6174という数はきわめて魅力的な数となる。

●6174に到達する回数と経路

以上はすべての生徒を対象にした授業であるが，中学生になると数学が好きな生徒がクラスの中で目立ってくる。そういう生徒には，４桁のすべての数が6174に到達するのだろうか，カプレカー操作を何回繰り返せば6174に到達するのだろうかと，疑問を投げかけるのもよいだろう。パソコンが得意な生徒はプログラムを作成して調べてみるかもしれない。

到達回数	頻度
0	1
1	356
2	519
3	2124
4	1124
5	1379
6	1508
7	1980
計	8991

表１　6174への到達回数

私は４桁の数が有限回で6174に落ち着くことを検証してみた。50行ほどのVisual Basicプログラムで1000から9999までの４桁の数について調べた。この場合，４桁がすべて同一の数字からなる場合（1111，2222，…，9999）を除く8991個の自然数に対してである。6174に到達する回数別の頻度を表１に示しておく。到達回数は最大で７回であった。７回でも到達しないとすればどこかで計算違いをしているのである。最初の数が6174はカプレカー操作をするまでもなく，6174であるので到達回数を０回とした。

では，なぜ４桁のすべての数が6174に到達するのかの説明はM. ラインズの著書につぎのようにある[2]。（これ以降は数式を使うので高校１年生の知識が必要である）

一般の４桁数を $abcd$（ただし $a \geqq b \geqq c \geqq d$）として第１回目の引き算をする。４桁の最大数は $1000a+100b+10c+d$ で，最小数は $1000d+100c+10b+a$ となる。最大数から最小数を引き，同類項をまとめると次のようになる。

$$1000a+100b+10c+d-(1000d+100c+10b+a)$$
$$=1000(a-d)+100(b-c)+10(c-d)+(d-a)$$
$$=999(a-d)+90(b-c)$$

さて，$(a-d)$ は１と９の間の数値をとり，$(b-c)$ は０と９の間の任意の値をとり得るから，上記の形の数は全部で90個ある。そこで，確認のため数の表を作成した（表２）。

90 X $(b-c)$ ＼ 999 X $(a-d)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	999	1998	2997	3996	4995	5994	6993	7992	8991
1	1089	2088	3087	4086	5085	6084	7083	8082	9081
2	1179	2178	3177	4176	5175	6174	7173	8172	9171
3	1269	2268	3267	4226	5265	6264	7263	8262	9261
4	1359	2358	3357	4356	5355	6354	7353	8352	9351
5	1449	2448	3447	4446	5445	6444	7443	8442	9441
6	1539	2538	3537	4536	5535	6534	7533	8532	9531
7	1629	2628	3627	4626	5625	6624	7623	8622	9621
8	1719	2718	3717	4716	5715	6714	7713	8712	9711
9	1809	2808	3807	4806	5805	6804	7803	8802	9801

表２　第１回引き算後の数

この表で，$(a-d) \geqq (b-c)$ であるから，左下の36個（網がけ）については意味のない数である。次に，第２回目の引き算をするために，表２の数を大きい順に並べ変えると表３になる。

90 X $(b-c)$ ＼ 999 X $(a-d)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	9990	9981	9972	9963	9954	9954	9963	9972	9981
1	9810	8820	8730	8640	8550	8640	8730	8820	9810
2		8721	7731	7641	7551	7641	7731	8721	9711
3			7632	6642	6552	6642	7632	8622	9621
4				6543	5553	6543	7533	8532	9531
5					5544	6444	7443	8442	9441
6						6543	7533	8532	9531
7							7632	8622	9621
8								8712	9711
9									9801

表３　第２回引き算前の数

この表で残るのは，網がけの重複を除くと30個の数である。30個の数がどのようにして6174に到達するのかを系統図で示したのが図１である。これで，すべての４桁の自然数が6174に到達することが一目にしてわかるであろう。最大７回で到達することもわかる。でも，なぜ6174に到達するのか本当はわかっていない。それにしても不思議なものだ。これを発見したカプレカーは，よほど頭がいいのか，よほどの暇人であるかのどちらかであろう。

図１に表れた数字はすべて９で割り切れます。興味のある読者はその理由を考えてください。

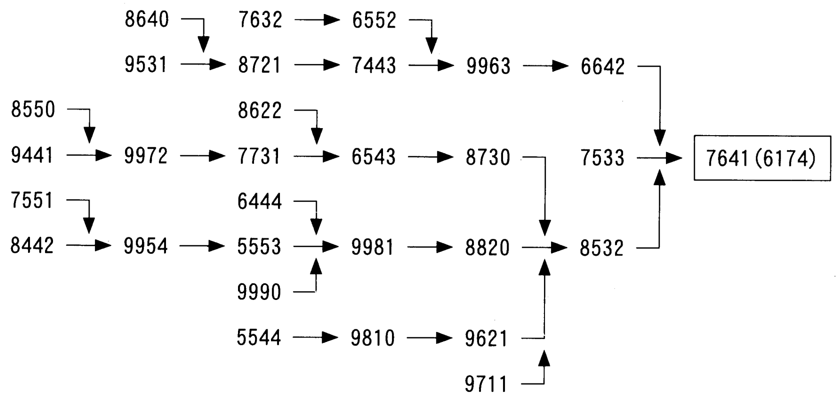


図１　7641（6174）への系統図

●４桁以外の数はどうなるか

４桁の数はすべて6174に到達すると説明したが，４桁以外の数はどうなるだろうか。このような現象は３桁の数についても確認されていて，すべての３桁の数はカプレカー操作（大きい数字から小さい数字を引く）により495に到達する。読者はこのことを確認すること。４桁の数と３桁の数が唯一の数6174や495に到達するのだから他の桁の数も同じことが起こるのではないかと予想するであろうが，残念ながらこのような現象が起こるのは4桁と3桁の数についてだけしか確認されていない。

２桁の数については，

9→81→63→27→45

の循環をする。５桁の数については，次の３つの循環のどれかに入ることが知られている。

71973→83952→74943→62964

75933→63954→61974→82962

59994→53955

６桁あるいはそれ以上の整数については，核の存在の結果を示すと表４の通りである。これによると，６桁や８桁には核が２つ存在していることになり，この場合は核に到達するケースとループに入るケースが混在することになる。どうして４桁の数が6174に到達するのかわかっていない。数学の未解決問題である。これを研究して君も未来の数学名人になろう[3][4]。

２桁	なし	
３桁	495	唯一
４桁	6174	唯一
５桁	なし	
６桁	549945, 631764	
７桁	なし	
８桁	63317664, 97508421	

表４　核の数

＜参考文献＞

［1］D. R. Kaprekar, Another Solitaire Game, Scripta Mathematica, 15(1949), pp. 244-245

［2］M. ラインズ，片山孝次訳「数6174の特性とは何か」『数－その意外な表情』岩波書店，1988. 2

［3］西山豊「6174の不思議」『理系への数学』2006年１月号，pp. 9-12

［4］Yutaka Nishiyama, Mysterious Number 6174
http://plus.maths.org/issue38/features/nishiyama/index.html
ケンブリッジ大学のオンラインマガジン Plus に掲載されたこの記事は多くの言語に翻訳され6174の不思議が楽しまれている。

（大阪経済大学教授）