1　手づくり教材でこんな思いを伝えたい！ ―教材に込める教師の思いと授業展開例

⑥実物や道具を使って，数学や数学的な考え方が社会で役立っていることを伝えたい！ [積み木問題]

西山　豊

編集部から，(1)手づくり教材であること，(2)数学的な考え方であること，(3)社会に役立っていることの条件で原稿の依頼を受けました。この３つを同時に満たす教材を見つけるのは難しいですが，私の知っている題材で積み木問題が中学生にも適しているのではと思い原稿にしました。

1　積み木を１個分以上ずらせるか

ここに紹介する積み木問題は調和級数に関係するので，高校数学または大学数学の範囲ですが，中学生でも十分理解でき多くの示唆に富んでいます。

用意するもの：積み木（概寸24mm×48mm×200mm）10個くらい

図１のような積み木の問題を考えてみましょう。積み木を机の上に何個か重ねて置いていき，いちばん下の積み木といちばん上の積み木の位置を１個分以上ずらすことができるでしょうか。

これを聞いてほとんどの人は，それはできないと答えます。できるかできないのかを考えてみようとせず結論を先に出してしまうのはデジタル時代の反映でしょうか。これは手品でもトリックでもなく，できることを約束しましょう。ずらして積みなさいと言うと人は均等にずらして積みます。でも均等にずらせば積み木は倒れてしまいます。均等にずらす行為もデジタル思考の表れでしょうか。いきなり答えを求めようとせず２つから始めてみましょう。ずらせる距離が$\frac{1}{2}$であることは直観でわかります。単純なところから始めるのは自然科学の基本です。さて，３つ目が問題です。ほとんどの人は２つの上に積もうとしますが，どうしても倒れます。だめであるならあきらめることが大事で，違うアプローチを模索すべきです。これを実現するには発想の転換が必要です。

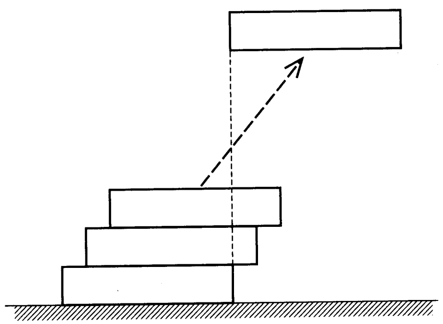

図１　１個分以上ずらせるか

これは重心の問題です。重心は中学の理科で勉強しますから，それとあわせて考えると効果的です。パソコン画面に向かって考えるより，実際に積み木を用いてあれやこれやと考える方が意外と早くわかるかもしれません。

さて，３つ目の積み木をどうするかですが，ここでヒントを与えましょう。積み木は上に積むものですか？　このヒントに読者は戸惑うことでしょう。積んでいくから積み木だという固定観念があるからです。積み木を上に積むのではなく下にすべり込ませるのです。３つ目の積み木を２つの積み木の下に置き，徐々にずらしていけば$\frac{1}{4}$までずらすことができます。以下，４つ目の積み木は３つの下に置いて$\frac{1}{6}$ずらし，５つ目の積み木は４つの下に置いて$\frac{1}{8}$ずらします。ずらした長さ$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{8}$をたせば１を超えます。つまり，一番下の積み木と一番上の積み木は，１個分以上ずらして積めたことになります。

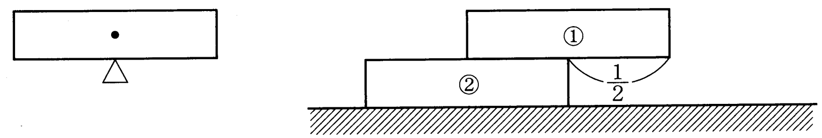

図２　$\frac{1}{2}$ずらす

2　重心の計算

以上のことを，図２～図４を参照しながら説明していきましょう。まず，

積み木①と積み木②について考えてみます。これは，明らかに$\frac{1}{2}$しかずらすことができません（図２右）。黒丸（・）は重心の位置です（図２左）。

次に積み木③をこの下に置くわけですが，その前に積み木①と積み木②をあわせた重心を考えます（図３左）。積み木③は，この重心までずらせますから，ずらす距離をxとして力のモーメントを求めてみます。力のモーメントは，［重さ］と［うでの長さ］をかけたものです。積み木①の重さと積み木②の重さはともに１で等しいですから，重心間の距離を等分した点が２つの重心になり，$\frac{1}{2}$の半分ですから距離は$\frac{1}{4}$となります。つまり，積み木③のずらす距離は$\frac{1}{4}$となります（図３右）。

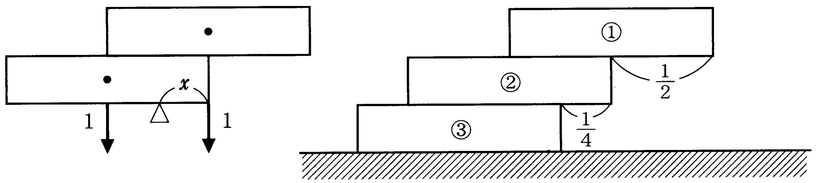

図３　$\frac{1}{4}$ずらす

次に積み木④を３つの下に置くわけですが，その前に積み木①から積み木③までをあわせた重心を考えます。積み木①と積み木②をあわせたもの（灰色）と，積み木③から重心を求めます（図４左）。積み木①と積み木②（灰色）は重さが２で，うでの長さはxです。積み木③は重さが１で，うでの長さは$\frac{1}{2}-x$です。積み木①と積み木②の力のモーメント（時計回り）は$2\times x$，積み木③の力のモーメント（反時計回り）は$1\times(\frac{1}{2}-x)$となり，これらが等しくなりますから，$2\times x=1\times(\frac{1}{2}-x)$，これを解いて$x=\frac{1}{6}$となります。つまり，積み木④のずらす距離は$\frac{1}{6}$となります（図４右）。変数$x$を含む式が苦手な生徒には次のように説明してください。積み木の重さの比は２：１です。重心間の距離は$\frac{1}{2}$です。この距離を重さの逆比，つまり１：２に内分する点を計算しますと，これが重心となります（$\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+2}=\frac{1}{6}$）。

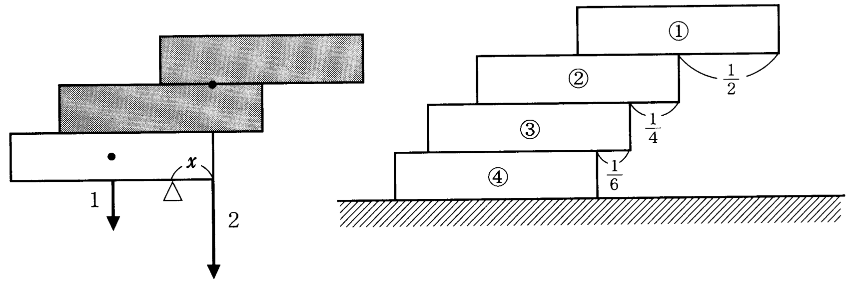

図４　$\frac{1}{6}$ずらす

積み木を$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$ずらしていけばよいことを説明しましたが，ここで一般化して，積み木がn個ある場合の重心を考えてみましょう。これは，$(n-1)$個の積み木と１個の積み木の重心として求まりますから，力のモーメントの関係から，

$$(n-1)\times x=1\times(\frac{1}{2}-x)$$

より，$x=\frac{1}{2n}$となります。

これを整理すると，ずらす位置を$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$，…，$\frac{1}{2n}$，…としていくと積み木を倒さずに積んでいけることになります。

このような数列を調和数列と言い，古代ギリシアのピタゴラス学派が和声の理論を研究したときに使われたと言われています。調和

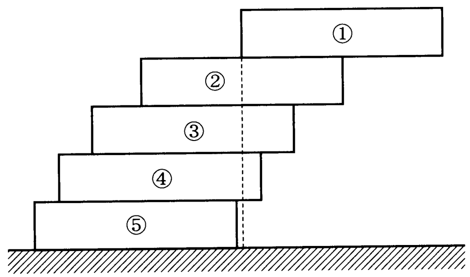

図５　１個ずらし

数列を合計したものが調和級数で，この数列の前から４個を計算してみましょう。

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\approx 0.5+0.25+0.167+0.125=1.042>1$$

これで積み木が５個あれば１個分以上ずらせることがわかります（図５）。

3　無限にずらすことができる

パソコンの表計算ソフトを使って次の２つの級数を計算してみましょう。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,\quad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

２つの級数は n が大きくなると項の値はどちらも０に近付きますが，項を合計すると前者はいくらでも大きくなり，後者はある値 $\frac{\pi^2}{6}$ に近付きます。前者は「塵も積もれば山となる」ということで，興味深い例題です。

調和級数はいくらでも大きくなると言いましたが，$\sum\frac{1}{2n}$ が実際にどのような速度で大きくなるかを調べてみましょう。ずれの合計である $\sum\frac{1}{2n}$ の値をパソコンの表計算ソフトで計算してみますと，

$n=4$ のとき $\sum\frac{1}{2n}=1.0417>1$，$n=31$ のとき $\sum\frac{1}{2n}=2.0136>2$

$n=227$ のとき $\sum\frac{1}{2n}=3.0022>3$

となります。

積み木問題は，いちばん下の積み木が余分に１個いるので，必要な積み木の数は $n+1$ 個となります。積み木１個分ずらすには５個（４＋１）で十分でしたが，積み木２個分ずらすには32個（31＋１）が必要で，積み木３個分ずらすには228個（227＋１）もいることになります。図６は32個を積み上げて２個ずらしを実現したものです。現実に32個も正確にずらしながら積み上げることは不可能で，これはあくまでパソコンで描いた理論上の話です。

級数が無限大に発散するとはいえ，非常に遅い速度です。参考までに，$\sum\frac{1}{2n}$ を関数 $y=\frac{1}{x}$ の積分と比較すると，次の関係があります。

$$\frac{1}{2}\left(\log n+\frac{1}{n}\right)<\sum\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}(\log n+1)$$

この式から，n を無限大に近付けると，$\sum\frac{1}{2n}$ は $\frac{1}{2}\log n$ のオーダーで発散することがわかります。図６の２個ずらしは log 関数のグラフを時計回りに90度回転させ，y 軸に関して対称移動させた形になっています。

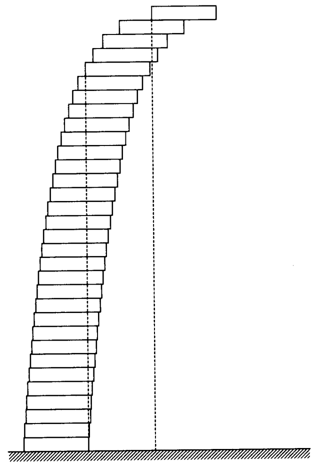

図６　２個ずらし

数学は基礎学問ですので，実際に社会に役立つのがイメージしにくいですが，数学的な考え方は広い意味で役立っているのではないでしょうか。新しい商品を開発するときは，従来の延長線上では何も出てきません。⑴基本に分解して考えること，⑵解答は何通りもあること，⑶物事を順序立てて考えることなどは，数学の得意とするところです。これに加えて「発想の転換」があれば，数学は社会や生活のために役立つものになるでしょう。この積み木問題が授業の教材の１つとして生かされればと思います。積み木問題を確かめたくて手ごろな積み木がない場合は，百科事典または DVD のケースで試してください。

＜参考文献＞
- 西山豊「積み木と調和級数」『数学を楽しむ』（現代数学社）
- G. ガモフ，M. スターン著，由良統吉訳『数は魔術師』（白揚社）

（大阪経済大学教授）