必ず授業が盛り上がる

面白問題コレクション

⑩多角形の性質を題材にした問題 [多角形の面積]

西山　豊

1　3つの計算方法

頂点の数が5個以上の多角形について面積を求める方法を考えてみましょう。多角形の形は凸多角形も凹多角形もどちらも含めることにします。仮に図1のような八角形の面積を考えてみましょう。

最も初歩的な求め方は，多角形を三角形に分割して，その三角形の面積を求めて，三角形の数だけ面積を合計するという方法です。頂点の数が8個の場合は，図2のように三角形の数は6個になります。四角形は2個の三角形に，五角形は3個の三角形に，六角形は4個の三角形に分割できます。一般に，n 角形は $n-2$ 個の三角形に分割できます。多角形の頂点の数 n と三角形の数の関係を調べ，法則があることを生徒に発見させることも大切です。

八角形が6個の三角形に分割されると，分割されたそれぞれの三角形の面積を計算することが問題になります。三角形の面積は，「底辺 × 高さ ÷ 2」の公式で求まります。底辺は頂点間の距離ですから，定規を当てればすぐに

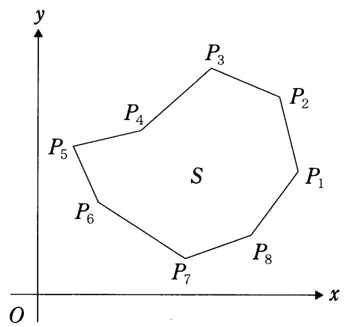

図1　面積を求めよ

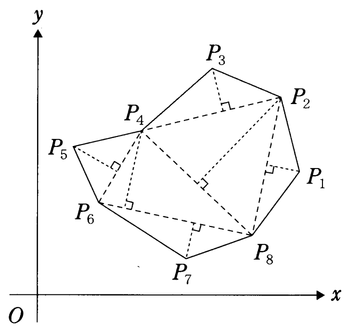

図2　三角形に分割

測れますが，三角形の高さは2つの三角定規を上手に使って線を引く練習もしてください。底辺や高さの線をかかせるのも図形の問題として重要なことです。底辺と高さは，定規で測って数値を読み取ります。何cm何mmと長さを測り，ノートにメモします。あとはかけ算，わり算，たし算で面積が求まるので，これができれば小学生は合格です。最も単純なこの方法は，土地の面積を求める「三角測量」として広く使われています。

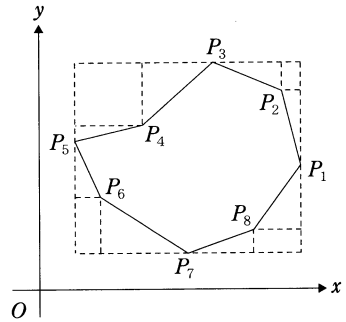

図3　軸に平行な補助線

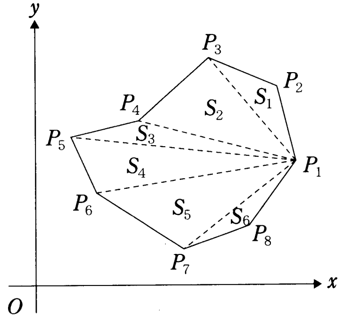

図4　分割の一般化

しかし，これでは簡単すぎます。もう少し工夫はできないかと考えてみましょう。中学生になると，グラフ用紙を使った問題が増えてきて，直交座標について学びます。そこで図3のように，x 軸，y 軸に沿って補助線を引いてみましょう。この図からわかるように，八角形の面積は，一番外の長方形の面積から8個の三角形と，4個の長方形の面積をひくことによって求めることができます。この方法による利点は，三角形の底辺や高さを定規でかいたり，その値を測ったりする必要がないことです。8つの頂点の (x, y) 座標さえわかれば，計算が簡単になるのです。

図2も図3も面積は計算できますが，頂点の数が増えていった場合，三角形の分割方法に一般性がありません。それで，1つの頂点を固定して，その頂点を1個必ず含めるような三角形の分割を考えてみます（図4）。このようにしておくと，三角形の分割が機械的に行えて，図2や図3のように問題の図を見ながら分割をどうするか思案する必要がありません。高校数学にな

ると，「ヘロンの公式」というのを学びます。これは，現在では高校数学の指導要領からはずされていますが，非常にパワフルな公式です。つまり，三角形の３辺の長ささえわかれば，その面積がたちどころに求まるのです。３辺の長さを a，b，c とすると，面積 S は，

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad （ただし，s=\frac{1}{2}(a+b+c)） \qquad (1)$$

となります。辺の長さは，ものさしで測ったりせずに，ピタゴラスの定理を使えば，頂点 $P_i(x_i, y_i)$ と頂点 $P_j(x_j, y_j)$ との距離 $\overline{P_iP_j}$ として求まります。

$$\overline{P_iP_j}=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2} \qquad (2)$$

2　台形公式から面積計プラニメーターまで

これまでの３つの計算方法は，小中高の算数・数学で学びますが，これ以外に台形公式を応用したちょっとエレガントな解法があるので，それを紹介しましょう。原理は簡単で，８個の各頂点から x 軸に垂線を下ろし，その足を H_1，…，H_8 とします。となり合う頂点と垂線で台形ができます。例えば，頂点 P_1，P_2 と垂線の足 H_1，H_2 とでは，上底が P_1H_1，下底が P_2H_2，高さが H_1H_2 の台形 $P_1H_1P_2H_2$ となります。台形はすべて横向きになっていて，台形であることがわかりにくいですが，首を90°傾ければ台形であることがわかります。

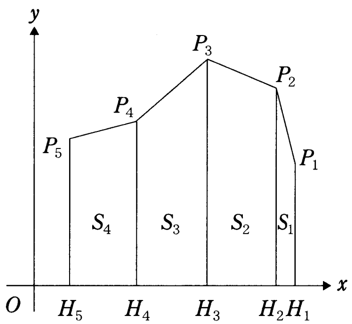

図５　正の面積

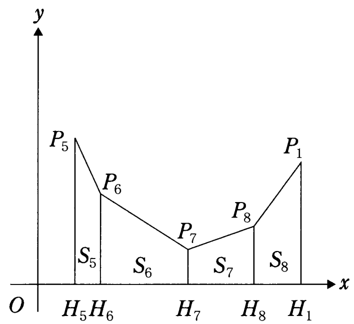

図６　負の面積

台形は全部で８個できますが，それぞれの台形の面積は，「(上底＋下底)×高さ÷２」で求められますね。８個の頂点のうち上側の頂点 P_1 から頂点 P_5 まで（図５）と，下側の頂点 P_5 から頂点 P_1 まで（図６）を分けて図示してみます。すると八角形の面積は，上側の４個の台形の面積から下側の４個の台形の面積をひくことで求まります。八角形の面積 S は次式で求められます。

$$S=(S_1+S_2+S_3+S_4)-(S_5+S_6+S_7+S_8) \qquad (3)$$

ここで，図５は正の面積，図６は負の面積として符号に注意すると，多角形の面積 S は次のように整理できます。一般に，n 多角形の面積は，頂点の数が n 個で，各頂点の座標を $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，…，$P_n(x_n, y_n)$ で表すことにしますと，

$$S=\frac{1}{2}\{(y_1+y_2)(x_1-x_2)+(y_2+y_3)(x_2-x_3)+\cdots+(y_n+y_1)(x_n-x_1)\} \qquad (4)$$

となります。この式は変数の添え字が循環的になっているため，面積を求めるプログラムが簡単になります。多角形の頂点を一周すれば面積が自動的に計算できたわけですが，この考え方を応用したものに，面積を測る製図用の道具「プラニメーター」があります。プラニメーターは，1856年にスイス人アムスラーによって考案されたものですが，図７のような琵琶湖の面積を求める場合は，地図の外に定点 O を固定し，測点 A を閉曲線 Γ に沿って，時計回りに一周したとき，棹（さお）に取り付けられた小車輪の回転数を読み取り，棹の長さを回転数にかけ合わせれば面積が求まります。一種のマジックのようですが，数学はこのようなところにも応用されているのです。

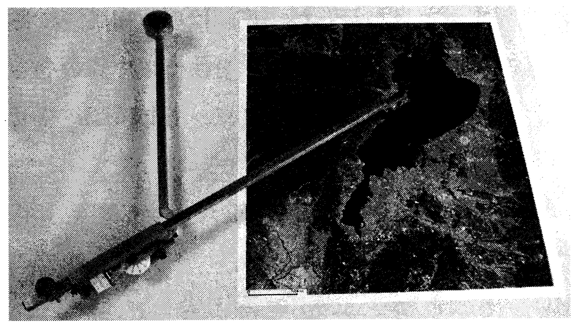

図７　面積計プラニメーター

（大阪経済大学）