# ⑫数学の真髄に触れる「定理」活用ネタ

西山　豊

幾何学の定理で美しいと思われるものを3つ紹介しましょう。その証明はかなり難しいですが，定理のもつ美しさは小学生でも理解できるはずです。数学の美しさに触れることにより数学が好きになり，数学を勉強するきっかけになればと思います。

まず，三角形に関する**モーレーの定理**で，「三角形の頂角の三等分線の辺に近い2つずつの交点は正三角形をつくる」（F. Morley, 1899）というものです。

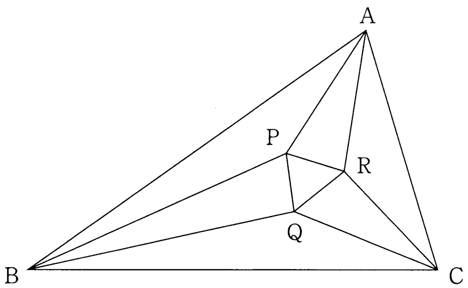


図1　モーレーの定理

図1のように任意の三角形 ABC をかきます。そして角 A，角 B，角 C をそれぞれ三等分して，その三等分線を三角形の中心に向かって引いていきます。辺に近い2つずつの交点を P，Q，R としますと，三角形 PQR は正三角形になるというのです。本当でしょうか？　正三角形とは，3つの辺の長さがすべて等しいか，3つの角度がすべて等しく60°です。皆さん，これはぜひとも生徒たちと一緒に試してみてください。外側の三角形がどんな形をしていても，真ん中にできる三角形はどれも正三角形になるので不思議です。

では，どうして正三角形になるのでしょうか？　このモーレーの定理の証明は，ちょっと難しいです。高校生になって数学がだれよりも好きになり力が付けば，自分で証明できるかもしれません。三角関数の正弦定理と余弦定理を用いると証明できます。また，初等幾何学による証明もあります。しかし，モーレーの定理は，証明を知らなくとも定理の美しさを堪能することができるのではないでしょうか。

次に，四辺形に関する**アウベルの定理**を紹介します。「四辺形の各辺上の内側または外側に正方形をかけば，相対する正方形の中心を結ぶ線分は等しく，かつ直交する」というものです。

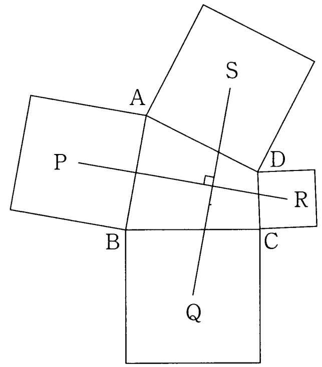


図2　アウベルの定理

図2のように，まず任意の四辺形 ABCD をかきます。そして各辺の外側に，AB，BC，CD，DA を1辺とする正方形をかきます。正方形の中心 P と R，正方形の中心 Q と S を結びます。すると線分 PR と QS は長さが等しいだけでなく，直角に交わるのです。皆さん，これもぜひとも試してください。そして生徒に様々な四辺形をかかせ，線分 PR と QS の長さを定規で測り，2本の線がなす角度を三角定規や分度器で測らせてください。直交しているのです。生徒には不思議と感動を与えることでしょう。

この定理は日本ではあまり知られていないようです。インターネットでは

ヨーロッパのサイトでときどき見かけます。ただし，モーレーの定理のように名前が付いていません。この定理のルーツを調べると，130年以上前のベルギーの雑誌にファン・アウベル（Van Aubel, 1878）の論文を見つけることができました。それで，とりあえずアウベルの定理と呼ぶことにしました。

この定理には，複素数やベクトルを用いたエレガントな証明があります。でも，複素数やベクトルは高校数学でないと学ばないから中学生には無理ですね。しかし，がっかりしないでください。複素数もベクトルも使わない初等幾何学による証明もあるのです。補助線をうまく引けば中学生でも証明できるのです。興味がある方は，西山豊「数学を楽しむ／美しい幾何学」（『理系への数学』現代数学社，2009年11月号，pp.4～7）をご覧ください。戦前の数学教育は幾何学にかなりの重点が置かれていましたので，当時の中学生はこのような問題を解くことができました。今の数学教育は，数字＝デジタル中心になり，このような図形問題に太刀打ちできなくなってしまったことが残念です。

最後に，不動点の作図に関する**西山の定理**を紹介しましょう。自分で言うのもなんですが，この定理は美しくて結構気に入っています。「任意に重ねられた２つの合同な正方形または長方形は，対応する辺の交点同士を結んで２本の線を引くと，その交点が重ね合わせの不動点になる」（Y. Nishiyama, 1982）というものです。

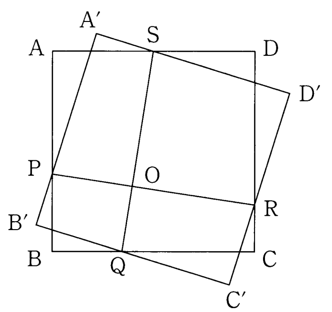


図３　西山の定理



図３のように正方形ABCDがあり，その上に合同な正方形A′B′C′D′があります。２枚の折り紙が少し回転してずれて重なっていると考えてください。辺ABと辺A′B′の交点をP，辺BCと辺B′C′の交点をQ，辺CDと辺C′D′の交点をR，辺DAと辺D′A′の交点をSとして，交点Pと交点R，交点Qと交点Sを結び２本の線を引きます。線分PRと線分QSの交点Oは，２つの正方形の不動点になるというのです。

不動点とは，図形の合同変換によって動かない点のことをいいます。図３で作図した不動点Oをコンパスの芯かボールペンのペン先で押さえて，重なっている上の正方形A′B′C′D′を時計と反対方向に回転させてください。するとどうでしょう。２枚の正方形はピタッと完全に重なるのです。２つの正方形がどんな位置関係にあっても，図３のようにして求めた点Oは不動点になるのです。これもぜひとも試してください。

一般に図形を重ね合わせるのは平行移動と回転移動の２つの組み合わせで行われますが，不動点の位置がわかっている場合は回転移動だけで重ね合わせることができます。私が，この定理を発見することができるようになったランダム・ドット・パターンの話など，興味のある方は私のホームページをご覧ください。（http://www.osaka-ue.ac.jp/zemi/nishiyama/index.HTML）

モーレーの定理，アウベルの定理，西山の定理と美しくて神秘的な定理を３つ紹介しましたが，いかがでしたでしょうか？　この３つの定理に共通するのは，最初の三角形や四辺形は任意（ランダム）でも，ある操作を施すとすべて正三角形になったり，長さが同じで直交したり，不動点になったりすることです。自然界や人間界は混沌としていますが，数学の目で見て，数学の定理を施すと秩序が見いだせます。ここに数学の楽しさがあります。

なお，モーレーの定理やアウベルの定理にはアプレット（Java Applet）と呼ばれるものがあり，三角形や四辺形の頂点をドラッグすることで図形の変化をパソコン画面で確認させるものが，インターネットに紹介されています。

（大阪経済大学）