✲連載✲ 自然界にひそむ数と形（その３）

正５角形の作図は難しい

◆西山　豊（大阪）

円に内接する正５角形

以上は正５角形の作図法の一例だが，もうひとつ別の作図法があるのを，最近になって私は知った。それは，堀江千代子『はてしない数の物語［平方根・無理数］』（国土社）を読んでいたときのことである。この本の104ページにのっていた。それを紹介しよう。

それは，円に内接する正５角形の描き方だ。直径PQをひき，中心Oからこれに垂直な半径OAを立てる。OQの中点Mをとり，MAを半径とする円弧をかき，POとの交点をNとする。すると，ANの長さは正５角形の１辺の長さとなる。頂点AからANを半径とする円をかいていけば，BとE，CとDが求まる（図１）。

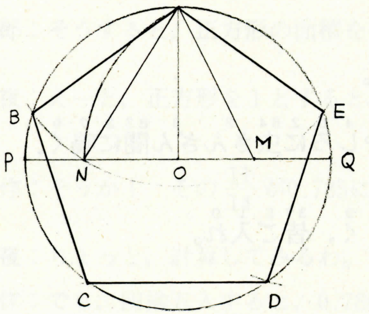

図１　円に内接する正５角形

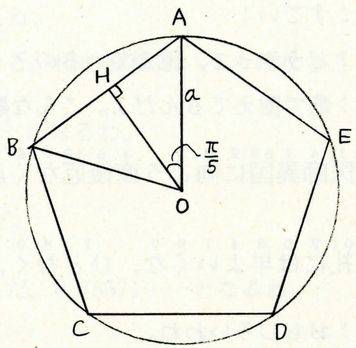

図２　半径と１辺の長さの関係

なるほど，これでも正５角形は描ける。でも，これがどうして正５角形になるのだろうか。そこで，簡単な計算をしてみた。外接円の半径をaとすると，

$$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=a,\ \mathrm{OA}=a$$

$$\mathrm{OM}=\frac{1}{2}\mathrm{OQ}=\frac{a}{2}$$

$$\mathrm{MA}=\sqrt{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OM}^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$\mathrm{MN}=\mathrm{MA}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$\mathrm{ON}=\mathrm{MN}-\mathrm{OM}=\frac{\sqrt{5}}{2}a-\frac{1}{2}a$$

$$\mathrm{AN}=\sqrt{\mathrm{OA}^2+\mathrm{ON}^2}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}a \qquad (1)$$

となる。一方，三角形OABに注目すると（図２），

$$\angle\mathrm{AOH}=\frac{2\pi}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{5}$$

$$\mathrm{AB}=2\cdot\mathrm{AH}=2\cdot\mathrm{OA}\sin\frac{\pi}{5} \qquad (2)$$

の関係がある。(1)式と(2)式の値が等しくなるわけであるから，つまり，

$$\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \qquad (3)$$

となる関係を応用したものである。(3)式は，複雑にみえるが，前回に計算した$\cos\frac{\pi}{5}$から検算することができる。

素晴らしい。このようにして正５角形を描くのか。ところで，この作図法は誰が発見したのだろうか。古代ギリシャのユークリッドの時代に，すでに確立されていたのだろうか。

正５角形の作図法は，前回の１辺を固定した描き方と，今回の円に内接する描き方の２通りを知っておくと完璧であろう。詳しい計算はともかく，分度器を使わずに正５角形が描けるならば，友達にいい格好ができる。

正17角形の作図法

このようにして，正５角形が定規とコンパスだけで描けたわけだが，一般の正n角形についてはどうなのだろうか。私の興味はつぎの問題へと移っていった。

『数学辞典』（岩波書店）で調べてみると次のような説明があった。

正 n 角形の作図が可能なための必要十分条件は，n を素因数分解したとき，

$$n=2^{\lambda}P_1\cdots P_k\ (\lambda\geqq 0) \tag{4}$$

で，P_1，$\cdots P_k$は，すべて相異なる2^h+1の形の素数（Fermat 数）となることである（C. F. Gauss），と。

こんなところに，フェルマーやガウスが登場するのか。フェルマーとはあの数学の難問といわれたフェルマーの予想を提唱した人であり，ガウスといえば代数学の権威である。私は，λ や h に値を入れてみた。

この式から $n=3$，4，5，6，8，10，12，15，17…などが求まる。

C. F. ガウスが正17角形の幾何学的作図法を得たことは有名である。

と，「ヒトデの足はなぜ５本か」『大阪経大論集』のある箇所に，この内容を掲載したところ，「ところで，正17角形はどのように描くのですか」という読者からの問合せがあった。私は，辞典の丸写しであったので，あわてて，その作図法を探してみた。作図法を知らなかったのである。

高木貞治『近世数学史談』（共立出版）の第１章，正十七角形のセンセーションに，「1796年３月30日の朝，19歳の青年ガウスが目ざめて臥床から起き出でようとする刹那に正十七角形の作図法に思い付いた。」として，彼の日記がのせられている。それを要約すると，つぎのとおりである。

正17角形の作図の可能性を証明するだけならば，簡単明瞭である。いま，

$360^{\circ}=17\psi$

としたとき，$\cos\psi$ の値が平方根で表されるならば作図可能である。

$\cos\psi$ の値がわかれば作図できるというのは，正５角形の作図に $\cos\psi$ または $\sin\psi$ が必要であったことを思い出せばよい。その意図するところは理解されるであろう。そして，ガウスは実際に，

$$\cos\psi=-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$
$$+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}} \tag{5}$$

という解を与えている。この詳しい解法を知りたい方は，前掲書を参考にするとよい。

この場合，$\cos\psi$ は単位円周上（半径の長さが１）の x 座標の値を示している。また，根号（ルート）の長さは図３に示すように，すべて作図可能である。

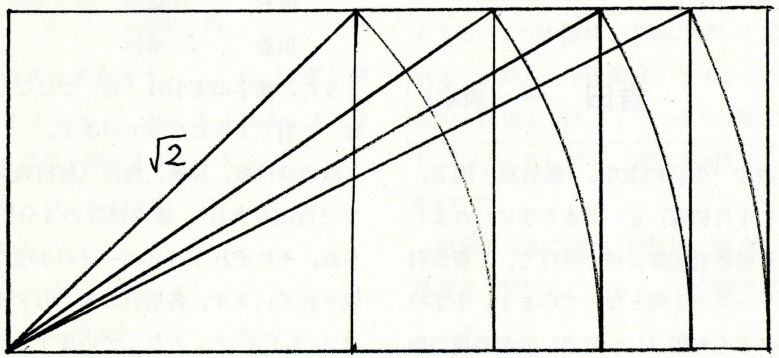

図３　根号（ルート）の長さ

まず，１辺の長さが１の正方形を描く。すると，「三平方の定理」より対角線の長さは$\sqrt{2}$となる。そこで$\sqrt{2}$を半径として円弧をかき，その長さを正方形の底辺の延長線上に移す。すると，たての長さが１，横の長さが$\sqrt{2}$の長方形ができる。この長方形に，また「三平方の定理」を適用すると，対角線の長さは$\sqrt{3}$となる。このようにして求めていけば，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$の長さが求まることになる。

他の方法では，自然数だけでなく，任意の数に対するルートを作図できる。誰か，正17角形の作図を完成されればどうですか。

ガウスやフェルマーが整数論を発展させたのは，正多角形の作図問題などの興味から出発したのかなあと思った。それにしても，知識を鵜呑みにしていた私は，恥じねばならないと思った。「正17角形は作図可能である」という言葉だけを知って，その解き方を知らなかったのだ。他人に言われて反省し，あらためて勉強し，少し賢くなった。

話がだいぶ脱線したので，次回からは，ヒトデの話に戻りたい。

（大阪経済大学）