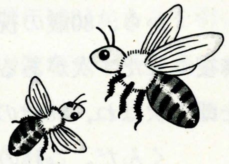
✲連載✲ 自然界にひそむ数と形（その10）

平面充填形と空間充填形



★西山　豊（大阪）

卵割によって細かく分裂した細胞は，どのような配置になるのだろうか。

これまでに分かっていることは，割球の大きさは皆同じであり，その数は，16，32，64個というように２のベキ乗である。ウニやヒトデの形態を決めるのは，２個〜４個の隣どうしの割球についての検討では駄目で，割球全体の位置関係を検討しなければならないということである。すなわち，「５」の形を決定するのに，すべての細胞が参加しているのである。

細胞分裂が始まっても，卵膜の大きさは変化しない。割球は卵膜の内側に並んでいくが，彼等は並ぶことに自らの意志を持っていない。この光景は，朝の満員電車に押し詰められていくサラリーマンの通勤風景が連想される。最初は隙間の大小があっても，電車が揺れるたびに人が移動し，終点近くになると人と人の間隔が互いに均等になっていく。無駄な空間やすきまができないように並んでいく割球の配置や満員電車には，エネルギー最小の原理が働いているのだろう。

平面や空間をうめつくす問題は，数学では充塡（じゅうてん）問題としてあつかわれる。

平面を合同な図形でうめつくす問題は比較的よく研究されている。日常では，それがタイルの模様などに使われている。美しいM. C.エッシャーの絵はこの繰り返しパターンを応用している。

合同な任意の４角形は平面をうめつくす。

私がこれを知ったのは，三重大学の上垣渉さんからである。最初は本当だろうかと疑った。ところが凸４角形でも凹４角形でも平面を隙間なくうめつくすのである。興味のある人は，植田三郎・上垣渉『しきつめの幾何』（国土社）を参照のこと。

任意の多角形ではなくて，形の整った正多角形について見ていこう。

平面を正 n 角形でうめつくすには，正３角形と正４角形と正６角形の３種類しかない。円や正５角形や正８角形では，すきまができてしまう（図１）。

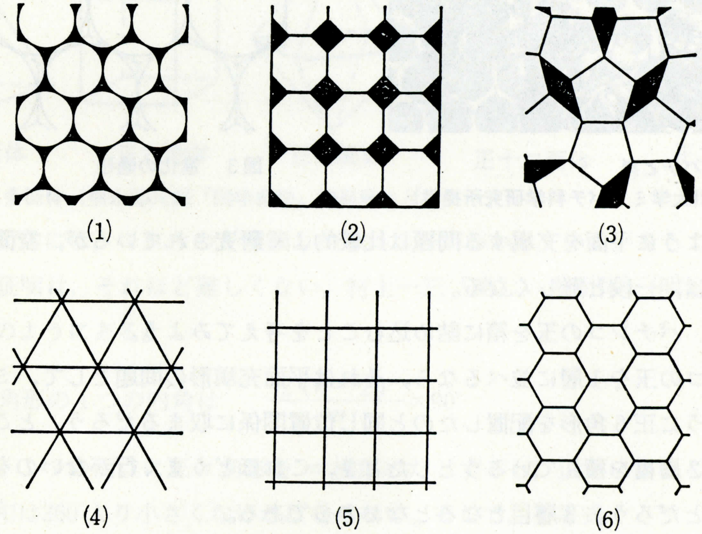


図１　平面充塡問題

平面充塡形と関連して興味あるのは，ミツバチの巣が正６角形であることである。このことは，拙著『卵はなぜ卵形か』（日本評論社）を参照のこと。

ミツバチは正６角形の巣房をつくることによって，もっとも倹約的で最適の形に到達している（図２）。正６角形を選択したのには，数学的な素養があったわけではない。事実，ミツバチは３角形も４角形も，６角形も知らない。

この秘密を解き明かすには，ハチの進化，すなわちミツバチの先祖であるハナバチの巣を知るとよい。ハナバチは正６角形ではなく無秩序な丸みをおびた巣房をつくる。ハチの胴体は丸いから，その巣が丸いのはあたりまえだ。

ハナバチの円がミツバチの正６角形に進化したことを理解するために，図１の(1)と(6)を重ね合わせてみるとよい。図３では，円を実線で，正６角形を破線で示した。円と円のすきまをなくしていけば正６角形にしか到達しない。巣房に正４角形や正８角形を選ぶ余地はまったくないのだ。

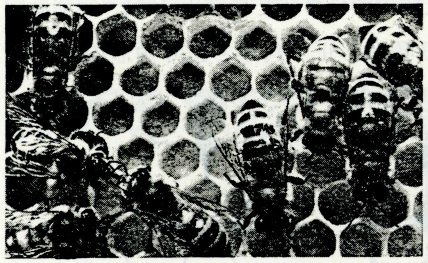


図2　ミツバチと巣
(写真：玉川大学ミツバチ科学研究所提供)

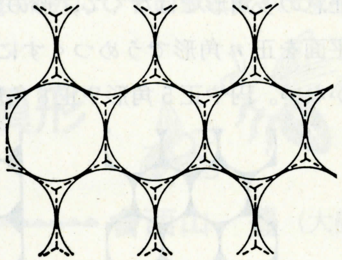


図3　進化の過程

以上のように平面を充塡する問題は比較的よく研究されているが，空間を充塡する場合は，一段と難しくなる。

例えば，パチンコの玉を箱に詰め込むことを考えてみよう。

パチンコの玉を1層に並べるなら，それは平面充塡形の問題として，ミツバチの巣のように正6角形を配置したのと同じ位置関係に収まるだろう。ところが，その上に2層目を積んでいこうとしたとき，これほどうまく行かないのを経験していることだろう。3層目となるとなおさらである。

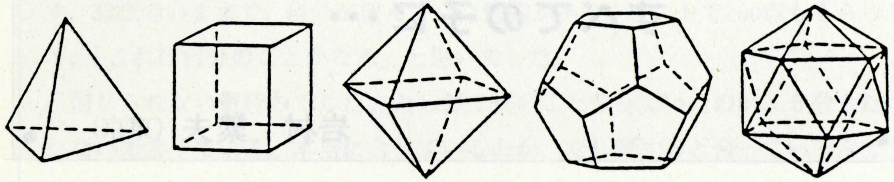
空間の充塡問題は結晶学などでも研究されている。結晶の構造を決めることはかなり難しい。難しいからこそ魅力的なのだが，私の能力と範囲外なのでこれ以上深入りすることは止めよう。

ところで今回の問題は，球の表面を合同な正多角形でうめつくす問題となる。一般の平面の充塡問題は端のない無限平面であったが，ここでの球の表面は有限な平面である。

ウニやヒトデの受精卵は，卵割によって細胞が小さくなり数が増えていく。その細胞は卵膜の内側にすいつけられるように並んでいく。細胞の大きさは同じで形は球である。もし，正 n 面体というものが存在したなら，割球の位置を，その正 n 面体に外接する球で近似できるはずである。

面が正多角形だけで構成されるものを正多面体という。たとえば，サイコロとして馴染みのある正6面体は，正4角形が6個集まってできたものである。

正多面体には，正4面体，正6面体，正8面体，正12面体，正20面体がある（図4）。それらを構成する面はそれぞれ，正3角形，正4角形，正3角形，正5角形，正3角形である。



正四面体　正六面体　正八面体　正十二面体　正二十面体

図4　正多面体（福永節夫編『図学概説』培風館より）

正多面体には，これらの5種類しかないことがわかっている。そして5種類しかない証明は，それほど難しくない。村上一三『美しい多面体』(明治図書) にはつぎのようにある。

正 n 角形の1つの内角は　$\dfrac{2(n-2)}{n}\times 90^\circ$

いま，1つの頂点に正 n 角形を m 枚集めたとすると，頂点に集まる多角形の内角の和は360°より小さくなければならない。そこで，不等式

$\dfrac{2m(n-2)}{n}\times 90^\circ < 360^\circ$ (ただし，$m \geqq 3$)

を解いて，(n, m) の5つの整数解を得るのである。

ここで，期待したいのは正16面体や正32面体や正64面体である。なぜなら，卵割は2細胞期から4，8，16，32，64細胞期へと2のベキ乗に増えていく。これらの細胞は，球の内側に並んでいくから，正16面体，正32面体，正64面体に近い形をとっていくはずである。ところが正多面体として存在するのは，面の数が4，6，8，12，20の5種類だけである。

正32面体または正64面体というものが存在すれば，この長い「5」探しの旅は一気に終わるはずであった。ところが，単純にそうは行かないのが苦しいところである。次回は幻の正32面体をどう切り開いたかを述べる。

(大阪経済大学)