フィボナッチ数列と黄金比

◆西山　豊（大阪）

葉のつき方を葉序（ようじょ）といい，葉序のタイプは対生，互生，輪生，らせんの4種類がある。らせん葉序はフィボナッチ数列と関係していることを説明したが，実は，このフィボナッチ数列は黄金比や正5角形とも関係している。そこで，柳亮『黄金分割』（美術出版社）等を参考にこれらの関係を説明しよう。

フィボナッチ数列の由来はつぎのとおりである。

13世紀のはじめ，イタリアのレオナルド・ダ・ピザ（通称フィボナッチ）がその著書の中で「1対の兎から1年間に何対の兎が得られるか，ただし，各1対は次の月から毎月新たに1対を生み，死亡は全く無いものとする」という問題を解いている。この数列は，先行する2項の和で表されるという性質の面白さから，葉序や樹木の枝別れやヒマワリの種の配列の問題としても応用されている。

さらに，フィボナッチ数列の連続する2項の比はある値に収束することが知られていて，その値は後述する黄金比 ϕ であるのだ。その証明は，

$$a_1=a_2=1$$

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$$

$\alpha=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$，$\beta=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$　とすると，一般項は

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$$

で，$n\to\infty$のとき，$\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})=\phi(1.618)$

となる（『数学辞典』（岩波書店）より）。

黄金分割は，古来もっとも理想的とされ，その意味で特に黄金の名に冠されてきた比例法である。その特殊な性質が古来，数学者や美学者の異常な興味をひき，

一般に流布されてきた。ところが，ひとくちに黄金分割と言っても，時代により，用途によって，解釈の仕方も扱い方も異なっている。

エール大学のジェイ・ハンビッジ教授は，ギリシャ時代の比例法は正方形を加えて次のような6種類の矩形から引き出されたものだとしている。

(1)	$1:1$		正方形
(2)	$1:\sqrt{2}$	(1.414)	ルート2矩形
(3)	$1:\sqrt{3}$	(1.732)	ルート3矩形
(4)	$1:\sqrt{4}$	(2)	ルート4矩形
(5)	$1:\sqrt{5}$	(2.236)	ルート5矩形
(6)	$1:\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	(1.618)	ϕ 矩形

ルート2（$\sqrt{2}$）矩形は，古来，美術のみならず実用の世界でも広く愛用されてきた。実用上ではこの矩形のもつ特質として二つ折りにしても四つ折りにしても比が変わらないので便利なところから，用紙の規格には現在でもこの比例が採用されている。ルート2矩形のことを白銀比ということもある。

ルート3（$\sqrt{3}$）矩形は，黄金率に近いひとつの理想的比例という意味で「近似黄金率」と呼ばれ，むかしから美術品や建築物の比例に応用されている。

ルート4（$\sqrt{4}$）矩形は，正方形を2個ならべた形で，同時に切半した形でもある。日本の畳はこの比を持っており，日本建築における面積概念の基本単位になっている。

第6の1：1.618矩形のもつ比が，ここに黄金率である。

円から割り出された調和図形のひとつにペンタグラムがある。これは正5角形を内包する星型（五稜星）のことで，円周の上に等間隔に置かれた稜の頂点を一つ置きに直線で結べば，最後に出発点へ戻り，5つの頂点をもった星形となる（図1）。底辺と対角線の比（CD：AC）は1：ϕ の黄金比となっている。

この図形は，かなり古くから存在し，ピタゴラスはこれをサルスピタゴラと名付けたと言われている。古代には徳の象徴，あるいは円満とともにある厳正威儀の化身と見られ，しばしば貨幣や護符に刻まれた。中世に入ってからは一層その神秘性をつよめ，奇跡を生み出す呪符と化したり，縁起をかつぐ職業の紋章とな

った。ゴチック寺院の建築に従事した中世の石工組合フリーメーソンの謎めいた紋章は，すべてこのペンタグラムから導き出された図形である。

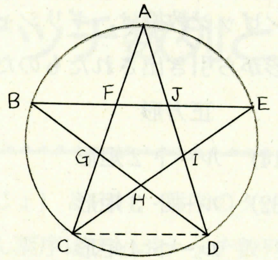

図1　ペンタグラムと黄金比

黄金分割を幾何学の命題として提起したのはユークリッドである。紀元前300年ごろに著した幾何学の第2書中にその解法が説かれている。その命題は「ひとつの線分を大小二つにわかち，小さいほうの線分と全線分とで出来た矩形を，大きい方の線分で出来た正方形に等しからしめること」というのである。

これは分割された各線分をA，Bとするならば，$A(A+B)=B^2$または$A:B=B:A+B$となるようにA，Bを求めればよいわけで，作図で容易に得られる。図2がそれだが，黄金矩形の作図法はこれ以外にもある。

正方形ABCDを作り，底辺BCの2等分点OからODを引き，その長さを半径とする円弧をBCの延長線上のC′点へおろす。つぎにCC′を半径とする円弧を，正方形の右辺DCへまわし，その切点をA′とする。ここに矩形B′BC′D′と正方形ABCDは同面積であり，B′BCA′は黄金矩形となる。

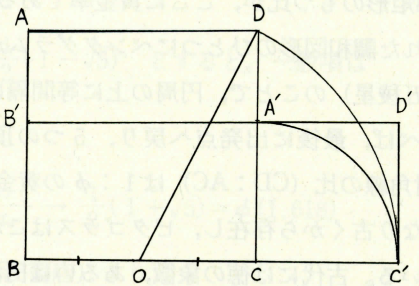

図2　黄金矩形の作図法

ところで，伏見康治・安野光雅・中村義作『美の幾何学』（中公新書）の中には，黄金分割についてつぎのような指摘がある。

黄金分割がどうして美しいのか？　その説明の部分はぼけてるのではないか。古来，美術の美を科学しようとした。そして図形を分断しているうちに黄金比につき当った。そしてその数理の見事さに酔って，これこそが美の秘密というか，御神体だと，思い込むようになった（安野）。

名刺が黄金分割に近いが，名刺は果たして美と呼ぶに価するか？　あらゆる西洋の古典美術に黄金分割をあてはめて喜んでいる本もあるけど（伏見）。

パルテノンの神殿からルネサンスの絵に至るまで，いろいろ線を引っ張って分析研究するらしいのですが，逆にやる人もいるわけで，先に黄金分割の線を引いておいてその線に即して絵を描くというんです。こうなると黄金信仰ですね。すぐれた美術作品に黄金比が見いだせるからといって，黄金比にかなっている絵はすばらしいという逆は必ずしも成り立たないのではないか（安野），とある。

以上の意見に私も同感で，黄金比については，私はつぎに示す「視覚の問題」として解釈している。

ヒトの目は2つある。もし1つなら，視野は円である。ところが目が2つあるから，視野は2円となる。矩形でいうならば，縦が1で横が2の範囲となるが，2つの目の重なりを考えると，横は2より短くなる。このようにして，横は1眼のときの1から2眼のときの2の間ということになる。1と2の中間は1.5であるが，2眼はもう少し離れているから1.6くらいで，これが黄金比となる。

ところが，ヒトの目には個人差がある。横方向に視野が広い人と狭い人の差があるので，それぞれが美しいと思う黄金比があるのではないだろうか。さらに，ヒトを離れて，イヌやウサギが美しいと感ずる黄金比も違うであるだろうし，昆虫や魚に至ると，ヒトの黄金比とかなりずれていることになるだろう。したがって，黄金比が5：8≒1：1.618というのは，きわめてヒト固有のものであるという気がしてならない。

以上のように，らせん葉序がフィボナッチ数列や黄金比に結び付くことがわかったが，これらの数理は数学者には魅力的だが，5弁の花の問題をこのような説明で片付けることは危険である。もっと，花の現実を見なければ5弁の謎は解決しないのではと思った。

（大阪経済大学）