『数学セミナー』2002.2 vol41, No.2

特集 不動点から何が見えるか

不動点を見せる

西山　豊

● エレガントな作図

いま，図1に示すように2枚の正方形の用紙がアトランダムに置かれている．これらを重ね合わせるための不動点をもっとも簡潔に求めてみよう．

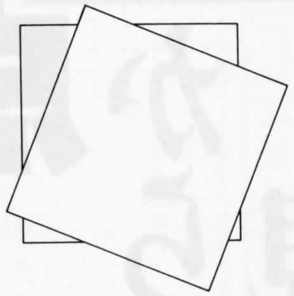
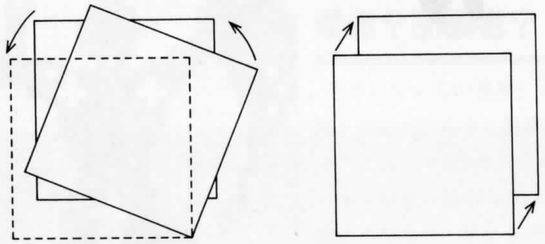


図1

合同な図形を重ねるためには，私たちはどのようにしているのだろうか．まず，図2(1)のように回転移動をし，その後，図2(2)のように平行移動をすることによって，重ね合わせを完了する．回転移動と平行移動の順序は逆でもよい．日常生活ではこのようなことはしないが，「数学的に」記述すれば合同な図形は平行移動と回転移動，または対称移動を組み合わせることによって重ね合わされるということである．このことを合同変換という．



（1）　回転移動　　　（2）　平行移動

図2　図形の移動

一方，平行移動と回転移動の2つの操作による移動は，1つの回転移動におきかえられる．この場合の回転中心は合同変換の不動点になっている．

不動点を求めるためのユークリッド幾何学による一般的な作図法は，つぎのように知られている．証明のために下の正方形をABCD，上の正方形をA′B′C′D′とする．正方形ABCDの辺ADに注目すると，辺ADは辺A′D′に移動する．頂点Aが頂点A′に頂点Dが頂点D′に移動するのであるから，線分AA′の垂直2等分線と線分DD′の垂直2等分線の交点Oが回転の中心になり，不動点になる(図3)．交点Oが不動点である理由は，三角形AODと三角形A′OD′が合同な三角形になることから明らかである．

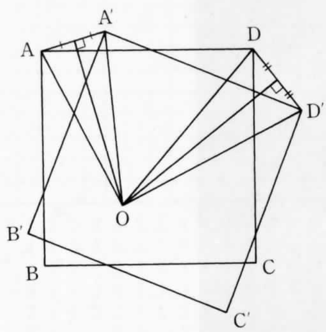


図3　垂直2等分線による作図

さて，もっと効率よくエレガントに不動点を作図できないものだろうか．私は図4に示すように用紙の上に2本の直線を引いてみた．そして，その交点をコンパスの針で押さえ，上の用紙を回転させてみた．するとどうだろう．2枚の正方形は完全に重なったのである．私は最初，偶然だろうと疑った．用紙を別の位置に重ねて何度もトライするうちに，これらが不動点であることを確信するに至った．たった2本の直線を引くだけで，その交点が不動点になっているのだ[1]．

図3に示した従来の作図法はコンパスと定規が必要であるが，図4に示した私の作図法はコンパスを使わないところが最大の特徴である．この不動点の作図法が可能なのは四角形の対辺が平行であることが必要条件であるので，正方形でなく長方形や平行四辺形にもこの定理が適用される．読者は手頃な正方形の用紙がないときは，レポート用紙やコピー用紙(長方形)でもこの現象を試すことができる．

図4において引いた2本の補助線の交点がなぜ不動点になっているのかの証明は，紙数の都合上，参考文献[1]にゆずることにする．

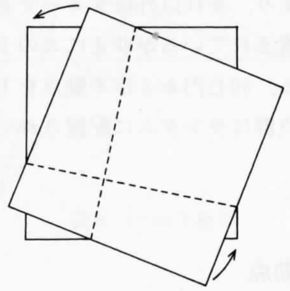


図4　西山の定理

● ランダム・ドット・パターン

合同な正方形の不動点を作図するエレガントな方法を図3に示したが，どうして私がこの方法を発見できたのか解説しておこう．

不動点の存在については，つぎのブラウエルの不動点定理が有名である．空間XからX自身への写像fに対して，$f(x)=x$を満たす点$x \in X$をfの不動点という．そして，任意の連続写像fは，少なくとも1つの不動点をもつ．

この定理によって不動点が一般に存在することは明らかであるが，不動点を具体的に作図することは別問題である．

1980年当時，『日経サイエンス』にジャール・ウォーカーの興味ある記事が掲載されていた[2]．ランダムにプロットした点群の図案を使って実験するさまざまな試みである．私が西山の定理を発見するヒントになったのはこの記事によるところが大きい．

私はこの記事に触発されて，ランダム・ドット・パターンを作ってみた[3]．

1辺が20 cmの正方形内に，2000個の点を散りばめた．各点の(x, y)座標はコンピュータで乱数を発生させることで求め，その座標値をもとにプロッターで作図した．無秩序に並んだ点群の図案，これをランダム・ドット・パターンと呼んでいる(図5)．

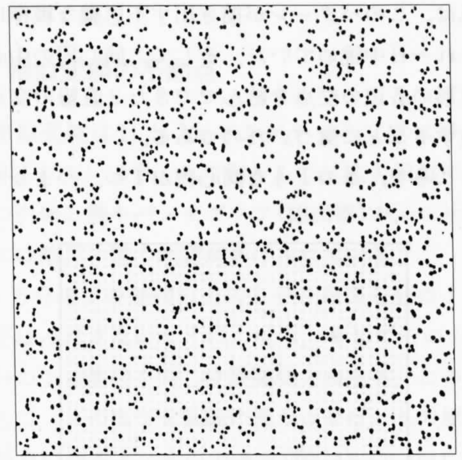


図5　ランダム・ドット・パターン

このパターンは，これだけでは何も面白くない．これを透明なビニール紙，たとえばOHP用のフィルムに焼き付ける．焼き付けたフィルムをもとのパターンの上に重ね合わせる．これで準備は完了だ．

上のフィルムを少し回転させる．するとどうだろうか．無秩序に並んだ点群の中から一瞬，同心円が浮かび上がってくるのだ(図6)．そして，この幻影を見た誰もは，この驚きに感動せざるを得ないだろう．同心円は1つできる．そして必ず1つである．同心円の中心に指をのせてフィルムを逆回転すれば，2つのパターンは完全に一致する．つまり同心円の中心は回転を施した中心軸であり，不動点であるのだ．

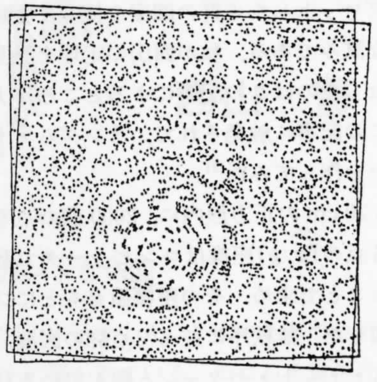
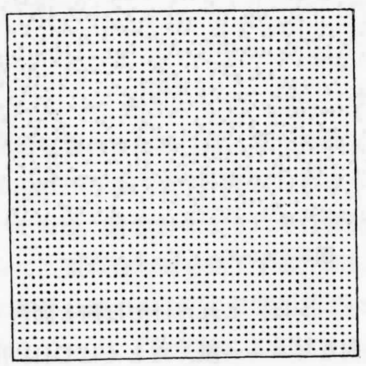


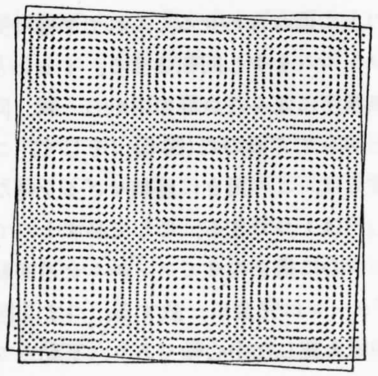
図6　不動点が見える

私は，このパターンが描き出す不思議な模様に魅了され一日中眺めていた．そして，同心円の中心が，正方形の各辺の交点を結んでできた2直線の交点と一致することに気づいたのである．

ところで，このような同心円が1つ，つまり不動点が見えるためにはどうして点群がランダムに配置されていなければならないのだろうか．その理由を説明するために，点群が規則正しく配置されたレギュラー・ドット・パターンを作ってみた(図7(1))．プロットした点群の数はランダムなときと同数の2000個とした．



(1)



(2)

図7　レギュラー・ドット・パターン

レギュラー・ドット・パターンをOHP用のフィルムに焼き付け，それを図案の上に重ね，フィルムを少し回転させた．規則的な場合は，いくつもの同心円が見えることになる(図7(2))．さらに，フィルムの回転角度を大きくすれば，同心円の半径は小さくなるとともに同心円の個数が増えていく．たくさん見える同心円の中で，本当の不動点はこれらのうちの1個であり，それ以外はダミーである．点群が規則的に配置されているがゆえにこのような現象になるのである．同心円および不動点を1個だけ表示するには，点群はランダムに配置されていなければならない．

● 円の不動点

重ね合わせの位置関係を図5に示したが，正方形は4辺が等しいので，これ以外にも3通りの配置が考えられる．そして，それぞれの配置に対して不動点が作図でき，重ね方は合計4通りの方法がある．これら4通りを図8(1)〜(4)に作図しておこう．図8(2)と図8(3)は，対応する辺が交点をもっていないので，各辺を延長してその延長線上での交点を求めることで西山の定理を拡張した．

このようにして，正方形には4つの不動点が存在することがわかった．それらをP_1, P_2, P_3, P_4とする．では，この4つの不動点はどのような位置関係にあるのだろうか．それは，4つの不動点は一直線上に並ぶのである．ちょっと不思議に思えるが，正方形に外接する円を描いてみると，これらの位置関係がよくわかる(図9)．正方形の回転移動は外接円の回転移動に対応している．

正方形の不動点は4個あり，正8角形の不動点は

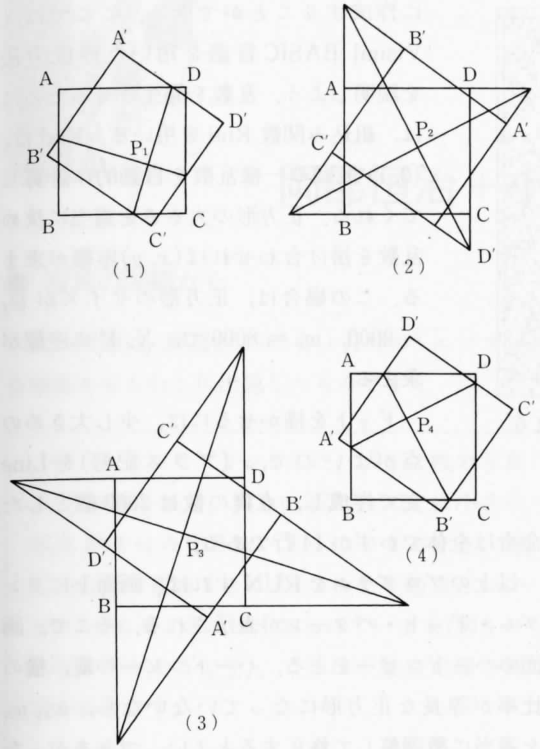


図8　4つの不動点

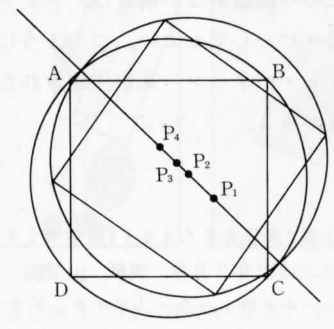


図9　4つの不動点は外接円の交線上に並ぶ

8個ある．一般に正n多角形は，n辺が等しく重ね方がn通りあるので，n個の不動点がある．これらの不動点は一直線上に並ぶことは正方形の場合と同じように，正n多角形に外接する円を描けば明らかである．

正n多角形のnを無限大にするとどうなるだろうか．それは円になる．円の不動点は無限個あり，それらは一直線上に並ぶ．言葉を変えて言うならば，合同な円の不動点は，2円の交線上にあり，しかも，この交線上ならどこでも不動点になる(図10)．各自確かめよ[4]．

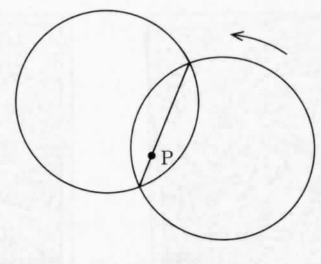


図10　円を重ねる

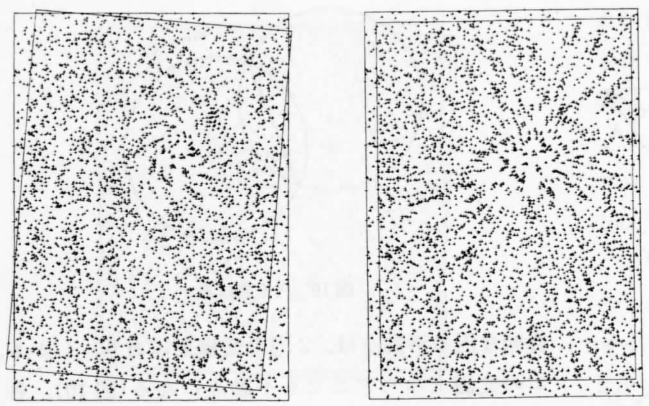
● 相似変換の不動点

相似変換はH. S. M. コクセターの文献に詳しく述べられている[5]．その例として，拡大相似には写真の引伸し機やパンタグラフ(縮図器)が，らせん相似には縮尺の違う地図があげられている．

1万分の1の地図の上に，小さな2万分の1の地図をはみださないようにのせる．そしてその上に4万分の1の地図を同じ位置関係でのせる．このようにして，この操作を無限に繰り返せば，この極限が不動点になるというのである(図11)．これは，「任意の連続写像は，すくなくとも1つの不動点が存在する」というブラウエルの不動点定理の特別な場合である．不動点の存在がわかっていても，その不動点を作図することは別問題である．相似変換の不動点の作図は，合同変換において示した西山の定理が拡張できるのだが，このあたりの説明は本特集の岡部・小島両氏の記事に触れられているので，ここでは省略しよう．

さて，相似変換の不動点もランダム・ドット・パターンを使って，その不動点を確認することができる．ランダム・ドット・パターンをOHP用のフィルムに縮小コピーして焼き付けるのだが，縮小比率は90パーセントまでが適当で，50パーセントにすると不動点を確認することは難しい．

不動点は1つしか見えないが，合同変換の場合と



(1) らせん渦が見える　　(2) 放射状の模様が見える

図11

比べると少し見え方が違っている．上のフィルムを少し回転させると，同心円ではなくらせん渦が見える，回転を右方向にすると右方向に吹き込むらせん渦が，回転を左方向にすると左方向に吹き込むらせん渦が見える(図11(1))．上のフィルムを平行移動すると不動点を中心に放射状の模様が見える(図11(2))．

● ランダム・ドット・パターンの作成方法

最近はパソコンがかなり普及しているので，プログラムを作ればランダム・ドット・パターンを簡単に作成することができる．ここでは，Visual BASIC言語を用いた作成方法を説明しよう．乱数を発生させるためには，組込み関数Rndを用いる．Rndは，(0, 1)区間の一様乱数を自動的に計算してくれる．正方形の大きさを適当に決め，乱数を掛け合わせれば(x, y)座標が求まる．この場合は，正方形のサイズが$w_x = 8000$，$w_y = 8000$で，X, Yに座標が求まる．

ドットを描かせるには，少し大きめの点がよいので，＋(プラス記号)をLine文で作成し，点群の数は2000個とした．命令は全体でわずか14行である．

表1　Visual BASICプログラム

```
Private Sub Command1_Click()
wx = 8000
wy = 8000
sx = 100
sy = 100
Line (sx, sy)-(wx + sx, wy + sy), , B
For i = 1 To 2000
X = Rnd * wx + sx
Y = Rnd * wy + sy
d = 30
Line (X - d, Y)-(X + d, Y)
Line (X, Y - d)-(X, Y + d)
Next i
End Sub
```

以上のプログラムをRUNすれば，画面上にランダム・ドット・パターンが表示される．そこで，画面のハードコピーをとる．ハードコピーの縦，横の比率が等長な正方形になっていないなら，w_x, w_yを適当に微調整して修正するとよい．できあがったパターンは，OHP用のフィルムに焼き付ける．焼き付けるための機器がない場合は，コピー機でフィルムに直接コピーしてもよい．このようにしてランダム・ドット・パターン一式が作成されたことになる．各自確かめよ．

参考文献

[1] 西山豊「折紙をそろえる」『数学セミナー』日本評論社，1982年2月号，表紙，p. 28.

[2] ジャール・ウォーカー「アマチュアサイエンス：ランダム・ドット・パターンとテレビのスノー・ノイズでの錯覚」『日経サイエンス』日本経済新聞社，1980年6月号，pp. 118-123.

[3] 西山豊「不動点をお見せします」『数学セミナー』日本評論社，1982年8月号，表紙，p. 122.

[4] 西山豊「円を重ねる」『数学セミナー』日本評論社，1986年11月号，表紙，pp. 67-69.

[5] H. S. M. コクセター，銀林浩訳『幾何学入門　第2版』明治図書，1965年.

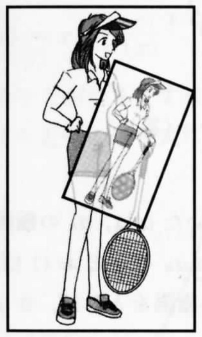
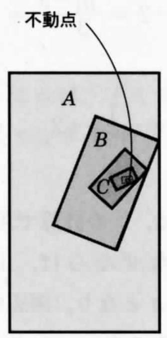
(にしやま ゆたか／大阪経済大学)

不動点の存在について

岡部恒治＋小島　誠

● 写真の問題から

次の問題は，岡部が1989年1月号の「エレガントな解答をもとむ」に出題したものです[1]．

> 同じネガからプリントした，大小2枚の写真A, Bがあります．大きい写真Aの上に小さい写真Bをはみ出さないようにのせるとき，対応する点で重なるところ(これを不動点といいます)があることはよく知られています(図1の左手の甲がそうです)．これは不動点定理の特別な場合です．
>
> 
>
> 図1
>
> 
>
>
> 図2
>
> 不動点を出すには，小さい写真の上に同じ縮小率のさらに小さい写真を同じ位置関係でのせ，またその写真の上にさらに小さい写真をのせ，……という操作を無限に繰り返します(図2)．この極限が点になり，それが不動点なのです．
>
> さて，数学的にはこれで問題がないでしょうが，無限回の操作はあまり気持ちが良くありません．そこで，大きい写真の上に小さい写真がのっているときに，その不動点の位置を作図するエレガントな方法を考えてください．

私たちが用意していた解答は，いくつかありましたが，以下のものがもっとも気に入っています(森原則男氏の読者解答も同じ)[2]．

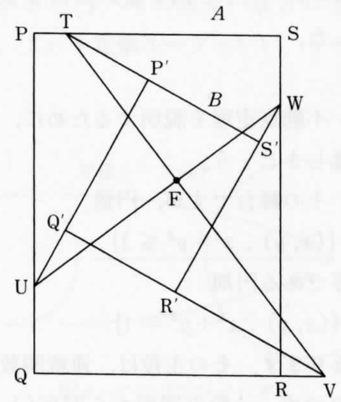


図3

図3のように，写真Aの長方形をPQRSとし，写真Bの長方形をP′Q′R′S′とします．写真Bの辺を延長して，写真Aのそれぞれ対応する辺(または，その延長)との4つの交点T, U, V, Wをとります．その4つの点の2本の対角線TV, UWの交点が求める不動点Fとなります．

(説明)　写真Aで水平線をQRからPSまで動かします．これに対して写真Bでは水平線がQ′R′からP′S′まで動くことと対応します．その2本の直線の交点の軌跡がTVとなります．一方，写真Aの垂直線をPQからRSまで動かして同様のことをすれば，UWという線分が出ます．この交点Fでは，水平方向も垂直方向も対応している点が一致していますから，不動点になるのです．