

Sudokuがイギリスで大ブレイク

西山 豊

●大阪経済大学経営情報学部

1. Sudokuの本がベストセラーに

2005年度はイギリス留学の機会があって1年間ケンブリッジで研究することになった。去年の5月頃、イギリスの仲間から「日本のSudokuというパズルがあるが、このパズルの一般解法がないか」と尋ねてきた。そういうパズルがあったかなと思って、よく考えてみるとイギリス人はSudokuを「スドク」と発音していたのである。余談ではあるが日本のKaraokeを「カリオキ」と発音している。

そういえば日本では電車の中で仕事に疲れきったサラリーマン風の人がこのパズルにとりつかれたように取り組んでいる姿を見たことがあり、一部の人が遊ぶちょっと不健康なパズルのように思えて、私は一度も試したことがなかった。そして、このパズルの正式名称も知らなかった。

Sudoku, つまり日本名の「数独」はパズル雑誌『パズル通信ニコリ』で使用されている名称で「すうどく」と発音し、「数字は独身に限る」を略したもので、1986年ごろから日本で流行っているパズルである。このパズルには前身があり、1970年代にニューヨークでDELL社(今のパソコン会社とは無関係)のパズル雑誌に「ナンバープレース」(数字を置いていく、の意味)

として流行したものを日本で「数独」という名前に変えたものである。ニューヨークの「ナンバープレース」が日本の「数独」になり、この「数独」が英語名を「Sudoku」として今イギリスで流行っているのである。ナンバープレースではなく日本名のSudokuであるのがちょっと嬉しかった。

このパズルがイギリスでどの程度親しまれているかを調べてみた。去年の春頃からイギリスの一流新聞「タイムズ」や「ガーディアン」がSudokuを取り上げたのをきっかけに、一般の新聞やコミュニティ紙でもいっせいにSudokuの問題を載せるようになった。現在はその新聞社が出題した問題が本になっている。日本でいうなら読売新聞や朝日新聞がSudokuのパズル本を出していることになる。書店に行けばSudokuの本がベストセラーとして書棚のトップに並べてある。あるテレビ局の番組を見ていたら、タレントとの対談があり「Sudokuを楽しんでいますか」とインタビューアが問かけると「もちろんです」と答えるシーンがあった。私のお隣の奥さんは毎日の新聞に載るSudokuを解くのが楽しみで日課になっているという。Sudokuは女性にも人気があり、解く人の姿はどこか明るく感じられた。

7月にニューカッスルの巨大なショッピング・セン



書店の棚にSudokuのコーナーができています(左)。「ガーディアン」の単行本と掲載コラム(右)。



ターで開催された数学展示会では、トピックスとしてSudokuコーナーがあった。数学教育研究所のスタッフが担当しSudokuの教具一式をそろえていた。教材までできているのには驚いた。ケンブリッジまでの帰りの電車の中では学生が一生懸命パズル本に取り組んでいる。何のパズルかと見ればSudokuの問題であった。最近ではSudokuがゲーム機になったものがあり、バスの中ではゲーム機でSudokuを楽しんでいる姿を見かけることがある。あとで触れるがSudokuはクロスワード・パズルのように紙と鉛筆ではなく、パソコン向きなのかもしれない。

ここまでくれば、ブームは本物である。私はSudokuのドクは「毒」の意味があり、このパズルの中毒から抜け出せなくなるとジョークのつもりで言ったがイギリス人には通じなかった。

2. Sudokuの数理

Sudokuは意外と隠れファンがいるのであるが、ここではSudokuが初めてという方のためにルールと簡単な解き方を説明しよう。

●— Sudokuの基本ルール

Sudokuは、3×3のブロックに区切られた9×9の正方形の枠内に1から9までの数字を入れるパズルの一つである。3×3のブロックの中、および9個の行、9個の列に数字をそれぞれ重複しないように置いていくというものである。Sudokuの由来「数は独身に限る」とはよく言ったもので重複してはダメで必ず独り

ということである。図1の例では合計9×9=81のマス目に30個の数字がすでに表示されている。この数字をヒントにして数字を埋めていくのである。ヒントの与え方にはヒントの位置が対称型と非対称型がある。図1は非対称型である。

●— 試行錯誤による解法

例えば、上から1行目にはすでに5が入っているから、この行には5はもう入らない。2行目にも5が入っているから、2行目にも5はもう入らない。また、右から1列目にはすでに5が入っているから、この列には5はもう入らない。1行目、2行目、右から1列目に5は入らないという意味の消去の線を引き、3×3ブロックで見た場合の右上のブロックには、すでに6が入っていて、入る余地のあるマス目は1個しかないののでここに5が確定する。このようにして3行7列目の数字が埋まったことになる(図2)。

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8	3				
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8		1	7	9

図2 解法の例(5の位置が決まる)

このような手順で数字を試行錯誤的に埋めていくのだが、どのような方法が最適かを数学的に証明するのは難しい。ただ、経験的にはすでに表示されているヒントの数字や個数が多いものから手をつけるほうが早く完成に近づく。9個の場所に8個埋まっていれば、あと1個は明らかであり、7個埋まっていれば6個埋まっているより答えが見つかりやすいということだ。図1ではヒントの8が5個、2が2個であるから、数字の8から始める方が効率的である。

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8	3				
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8		1	7	9

図1 Sudokuの例

● 生成できるパターンの数

すべての数字が埋められると図3のようになる。これがSudokuの完成パターンである。9行のどの行をとっても、9列のどの列をとっても、3×3ブロックのどのブロックをとっても、数字は1から9までの数字で重複していない。

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

図3 完成パターン

数字が重複せずバランスよく配置されている完成図を見て、読者はある種の“美”を感じることはないだろうか。このような数字の配置はどの程度あるのだろうか。私は少ないのではと予想したが、調べてみると、かなりのパターンが可能であることがわかった。たとえば、ひとまわり小さい2×2のブロックに区切られた4×4の正方形のモデルで計算してみると288個のパターンがあった。9×9のSudokuではもっとパターンが多くなることが予想される。

これを実際に計算した人がいる。B. フェルゲンハウエルとF. ジャービスはこの数は

$$6,670,903,752,021,072,936,960 \approx 6.671 \times 10^{21}$$

であり、もとの式は

$$9! \times 72^2 \times 2^7 \times 27,704,267,971$$

としている[2]。式の最後の項は素数である。素数ということは分解不可能で、これが数式で表される最高の形であることになる。この式と値が正しいものであるか私は検証していないが、たぶん間違いないであろう。相当の数のパターンができるということであり、Sudokuパズルが枯渇する可能性は低いといえそうだ。

● 解の一意性

Sudokuは9×9=81個のマス目に数字を入れていくパズルだが、ヒントとしてあらかじめ数字が表示されていて、その個数はほとんどが20から36個の範囲である。図1の場合は表示されているのは30個であり、一意な解の図3に到達した。

表示されているヒントの数が少なくなればそれだけ別解が出やすくなる。極端な話として、9×9のマス目がすべて空白であれば、無限に近い別解があるということであり、80個埋まっていれば別解の余地がないということである。

それでは別解がでないためのヒントの最小個数はいくつなのだろうか。これは、きちんと数学的に証明されたわけではないが、いままでに発表されたもので非対称型のSudokuは17個のものがある。対称型のSudokuは18個である。

非対称型Sudokuの最小問題、n=17の一例を図4に示しておく。これはインターネットに公開されたものでG. ロイルが提示している450個の最小Sudokuのうちのひとつである[3]。ヒントが少ないので難解であるが、解はユニークに決まる。

							3	1
6			2					
			7					
	5		1	8				
2					6			
			3			7		
			4		2			
	3		5					
7								

図4 最小Sudokuの例(非対称型, n=17)

● オイラーのラテン方陣を応用

Sudoku, 「数独」, 「ナンバープレース」の起源は18世紀にスイスの数学者オイラーが考案したラテン方陣にまでさかのぼる。

ラテン方陣とは行と列に数字が重複しないようにしたものである。図5では1から4までの数字が各行に

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

ラテン方陣

Sudoku

図5 ラテン方陣とSudoku

入っていて、各列にも1から4までの数字が重複せずに入っている。4×4のラテン方陣を2×2のブロックに区切る。そして、このブロック内においても1から4までの数字が重複しないように条件を厳しくしたのがSudokuである。したがってSudokuはラテン方陣の応用とみることができる。

一般にn²×n²のラテン方陣はn×nのブロックに分けることができSudokuを作ることができる。Sudokuは9×9のもがポピュラーだが上級コースとして16×16のものもある。

Sudokuとラテン方陣を説明してきたが、これらは数学としての要素が多く含まれている。パズルを解くだけでなく、つぎのような手頃な大学入試問題を作ることができる。4×4のマス目で、ラテン方陣となるのは何通りで、Sudokuとなるのは何通りであるか。答えは、ラテン方陣となるのは4!×3!×4=576で、Sudokuとなるのは4!×2!×6=288である。これらはパソコンを使わずに紙と鉛筆で解ける。興味のある読者は計算してください。

さて、オイラーはn=5のラテン方陣について、その個数が5!×4!×56であることを示している(1782年)。Sudokuとの関係でいえば、n=9のラテン方陣はS. E. バンメルとJ. ロードシュタインが

$$9! \times 8! \times 377,597,570,964,258,816$$

であることを示している(1975年, [4])。計算にあたっては当時のコンピュータPDP-10が使われている。この式を最後まで計算すると、

$$5,524,751,496,156,892,842,531,225,600$$

$$\approx 5.525 \times 10^{27}$$

となる。

n=9のとき、ラテン方陣の数は10²⁷の、Sudokuの数は先に示したように10²¹のオーダーであるので、Sudokuはラテン方陣の約10⁻⁶であり、制限されたパターンであることがわかる。それにしてもSudokuの数は10²¹個もあり天文学的数字であることに変わりない。

ラテン方陣にしてもSudokuにしても数字の並び方が実にバランスがよい。このバランスのよさに注目して、ラテン方陣はすでに実験計画法の分野で応用されている。Sudokuの配置についても統計の分野に応用されると新しい研究の分野が開けるのではないだろうか。今後が期待される。

というわけで、私もイギリスではSudokuに挑戦してみた。そして試行錯誤ではあるが、どんな問題が出されても時間さえかければ解答できるというレベルに達した。Sudokuはたしかに達成感の味わえるパズルである。数字のバランスのよさだろうか。また、クロスワード・パズルのように鉛筆と消しゴムというスタイルには向かないような気がする。それは、難しい問題になると数字の配置を仮定することが多く、行き詰った場合どこまで戻ればよいのかわからなくなるからだ。これはやはりパソコン向きのパズルではないだろうか。

3. 遊びの精神が健在なイギリス

Sudokuは日本ではパズルファンの中にしか流行らないと思っていたが、イギリスでは国民全体が楽しんでいるように思える。なぜなのだろうか。この違いはどこにあるのかを考えてみた。

Sudokuに似たものとしてクロスワード・パズルはイギリスが発祥地である。また、アガサ・クリスティ、コナン・ドイルなどの都会型の推理小説もイギリスで誕生している。雨の多いどんよりとした天候、家の中に閉じこもることが多い中、パズルや推理小説に楽しみを見出すというイギリスの気候と国民性にあるのではとも考えてみた。

イギリスを含めヨーロッパではSudokuを愛好する人々とともに、Sudokuを研究する数学者も多い。

Sudokuを研究課題にしても白い目で見られること

はない。そして立派な論文が多く出ている。日本でなら魔方陣や虫食い算を研究に没頭していたら、あれは数学マニアが趣味ですること、数学者ではないというレッテルが貼られることであろう。

イギリスの人口は約6000万で日本の半分である。生物学的に見て日本の方が優れた研究者が2倍はいてもおかしくはない。18世紀の産業革命から19世紀のビクトリア王朝時代の最盛期までイギリスが成功したのは、その機構ではないだろうか。大英帝国の成功の影にはアジア、アフリカの植民地から多くの富を得たという歴史の経過も忘れてはならないが、数学をはじめ、科学技術が国を発展させたという認識があり、今でも数学や数学者を大事に扱ってくれる。さらに汎用性のある英語という言語を持っていたことも強みである。日本語は文学性に富むが難しい言語で汎用性には欠ける。

この時期にイギリスでは数学者として微積分のニュートン、対数のネピア、ブール代数のブールが、物理学ではキャベンディッシュ、電磁気学のマクスウェル、化学者のファラデー、進化論のダーウインなど多くの科学者を輩出している。

ケンブリッジのキャベンディッシュ研究所にはいまでも世界中の研究者が集まってくる。DNAの二重らせんを発見したワトソンとクリックをはじめ70名のノーベル賞学者がケンブリッジで育っている。数学者のラマヌジャンもトリニティ・カレッジに在籍していたことがあり、フェルマーの最終定理を証明したワイルズはケンブリッジ出身である。

このように数学や科学は国を興し繁栄させたという自負と認識があり、国民は数学を大事にする。一方、日本では「受験の数学」の言葉で表現されるように、数学が受験生の能力を選別する手段だけに使われている。やや、イギリス最良の説明になってしまったが、最良の分を差し引いても説明の半分はあたるのではないだろうか。

私は、2005年4月からケンブリッジに留学の機会を得た。1971年に数学科を卒業しているが大学院の経験がなく研究といえば本誌『数学セミナー』に発表してきた遊びの記事がほとんどである。この中から「ブ



トリニティ・カレッジの正門。
ニュートン、ラマヌジャンもここで学んだ。

ーメランの飛行力学」、「五弁の謎」と「不動点の作図」を英訳して留学をアプライした。

4月にケンブリッジについてみると宇宙物理学者ホーキングと同じ相対性理論のグループに配属され個人研究室が用意されていた。極端に言えば、ブーメランの記事がケンブリッジで認められたということである。ここには面白いものは何でも見てやろうという昔の大学のよさが残っているような気がする。

Sudokuを数学のひとつとして受け入れるイギリスの風土を感じるとともに、日本の数学と数学者のありかたについて考えさせられた1年でもあった。

参考文献

- [1] インターネットのフリー百科事典 Wikipedia より「Sudoku」の項を参照。
- [2] B. Felgenhauer, F. Jarvis, *Enumerating Possible Sudoku Grids*, 2005.
- [3] G. Royle, *Minimum Sudoku*, 2005.
- [4] S. E. Bammel, J. Rothstein, *the Number of 9×9 Latin Squares*, *Discrete Mathematics*, 11(1975), 93-95.

[にしやま ゆたか]

Sudoku(数独)を解いてみよう

●出題
阿原一志

1
難易度：★★

			8					
	5	8	2	3	1	9	7	
	1	3	7		9	5	6	
			8		4			
		9	5	2	7	1		
	2	7		6		4	8	
8	6			9			1	3
3			1	7	6			9
9			5					2

「本」という字を作ってみました。とてもやさしいです。

2
難易度：★★★

5		4	8		6	2		9
6		9	2		7	5		3
4		6		7		9		8
			6	4				
7	1		3		6		5	
9		5	3		1	7		4
2	3	7		5	8			1

最初にどこに着目すればよいか、探してください。

3
難易度：★★★

			7	3			2	
3		1			4			
		4		2		1	9	
	6							9
9	8				4		7	
2							8	
	3	9		4		6		
			9			7		1
	5			7	2			

点对称な模様を作ってみました。初中級です。

4
難易度：★★★★★

	7		2		6			8
6		5				9		
					3		1	
		7				3		
1			9					
		8				4		7
	4				2		7	
8								
	9		3		1		4	

中級になると「定員確定」などのテクニックが必要です。

5
難易度：★★★★★★

4		1				2		
				3		4	8	
				6	7			
6	1							
8				9		3	7	
			8	2				
	2	3						
		4						9
		8		7		1	4	

上級問題です。じっくり取り組んでください。

6
難易度：★★★★★★★

	1			4			8	2
	7		6	5	1			3
		5		8				
	4	1	5		2	3	8	
		7		3		1		
	8		7		3			
	6	3		1		2	7	

超怒級の問題も一つ用意しました。解けるでしょうか？