

一つは  $n = 3$  の場合です。数通は紙片数 7, 1 通は紙片数 8 の切り方を述べてくださいましたが、横手市・佐藤工氏は講談社の『数学ゲーム I』p. 63 に、紙片数 6 の切り方のあることを知らせてくださいました(図 7 参照)。ありがとうございました。同じ切り方は、新潟市・熊木辰雄氏からも寄せられました。 $n = 3$  を出題から外したのは、最小紙片数の確認が難問であり過ぎると考えたからです。

他の場合の 1 タイプは、 $n = a^2 + b^2$  となる自然数  $a, b$  がある場合です。 $a, b$  の一般な場合を考えた上で、 $n = 2, 5$  を示すもので、解答数は僅か。特別な  $a, b$  について解答した上で  $n = 2, 5$  に言及したのも僅か。 $n = 2, 5$  の場合を答えた上で、この一般な場合のいくつかの例を加えた解答がその他数通でした。いずれも立派と感じましたが、紙片数の最小については言及なしでした(図 8 参照)。大きい正方形の 1 辺の長さだけの平行移動により、補い合うのです。

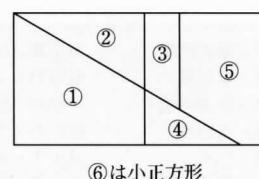
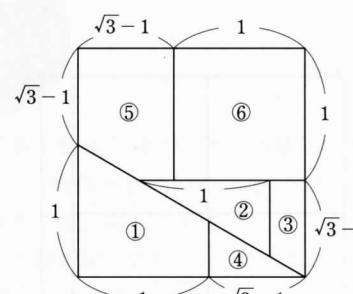


図 7

この他、 $n = 8$ 、紙片数 13(図 9 参照)が、尼崎市・松尾武志氏から寄せられました。紙片数 13 は最小であろうと思われますが、説明はされていませんでした。

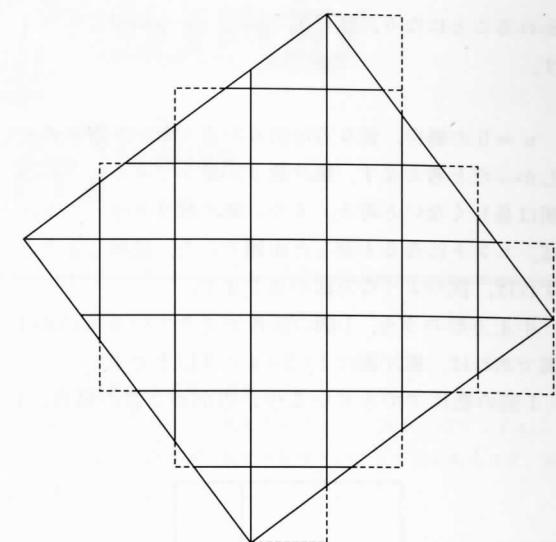


図 8 (辺に沿っての平行移動で補い合う)

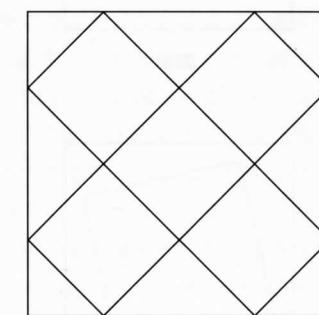


図 9

寄せられた解答の内容について、個別にいろいろコメントすべきであったかも知れませんが、とくに取り上げる特徴的な解答ではなさうでしたので、個人名はあまり挙げないで済ませました。

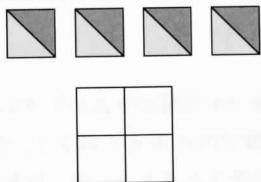
[ながた まさよし]

⑥は小正方形

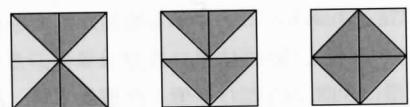
図 7

## 出題 ● 出題者 2 西山 豊

図のように対角線を境に色分けしている正方形があります。この正方形 4 枚を使って  $2 \times 2$  のマス目を埋めるとき、異なるパターンは全部で何通りできますか。

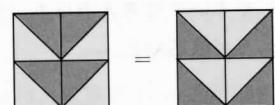


例)



ただし、色の対称、回転対称、反転対称などは同じとみなします。

[注] 色の対称の例



解答

2

このパズルは 2005 年度にケンブリッジへ留学していたときに、イギリスの研究仲間から教えてもらったパズルである。イギリスでは小学生の数学の授業に使っているそうだ。問題の意味がわかりやすく誰でもが取り組めるが、簡単には結果がもとまらない。悪戦苦闘して結果が出たとき、ある種の達成感が味わえるところにこのパズルの魅力があるのかもしれない。

さて私は、このパズルを試行錯誤的にパターンが 27 通りであるということを見つけたが、その方法が総当たり法で、これは数学的ではない。もっとスマートな解き方があるはずだと思い、「エレガントな解答をもとむ」欄に出題させていただいた。

応募は 58 名で、10 代 2 名、20 代 5 名、30 代 2 名、40 代 16 名、50 代 18 名、60 代 7 名、70 代 5 名、80 代 3 名と、10 代から 80 代まで幅広い層にまたがっていた。そのうち正解の 27 パターンに到達したのは 40 名で約 7 割だった。解法は大きく分けて 4 つあった。1 つ目は色を無視してフレームだけで分類すると 6 種類あり、そのあと色を塗って 27 パターンであるとするものが 23 名で典型的な解法だった。2 つ目は最終結果だけを示し、それを分類しているものが 12 名で、おそらくすべてのケースをチェックされたのではないだろうか。3 つ目はパソコンで解いた方が 3 名いた。言語は Visual Basic, C, Java などでプログラミスト

が添付されていた。4 つ目はバーンサイドの補題を使って簡単に 27 パターンを計算した方が 2 名いた。

27 通りという答えを出した答案のみを正解とした。この中には 4 種類の解法が混在している。ここでは 1 つ目と 4 つ目がエレガントな解法とみなせるのでそれを以下説明する。

### 【解法 1】

埋める正方形のことをタイルとよぶことにする。 $2 \times 2$  のマス目に 4 枚のタイルを埋めるが、タイルはその位置関係によって図 1 上のように 4 通りある。したがって、生成されるパターンは全部で  $4^4 = 256$  通りということになる。

タイルの色を無視して、フレームでみると位置関係は図 1 下のように 2 通りとなる。そこでフレームだけで何通りのパターンができるかを考えてみる。

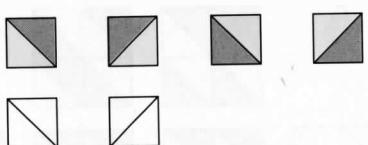


図 1 タイルのパターン

フレームには対角線が 1 本入っている。この対角線が  $2 \times 2$  のマス目の中心に何本集まるかを考えることでつぎのように分類できる。対角線が中心に集まるのが 0 本の場合は A, 1 本の場合は B, 2 本の場合は C<sub>1</sub> と C<sub>2</sub>, 3 本の場合は D, 4 本の場合は E として図 2 に

示しておく。この基本的な6パターンに分類することが問題を複雑にしないキーポイントになっている。

その後、それぞれのパターンについて色塗りをしていくが、色塗りはタイルごとに2通りあるから、全部で $2^4 = 16$ 通りあり、この中から合同なものを重複として省いていく。その結果、A型は4個、B型は4個、C<sub>1</sub>型は5個、C<sub>2</sub>型は6個、D型は4個、E型は4個となる。そして、

$$4+4+5+6+4+4=27$$

で27個の異なるパターンが求まる(図3)。色塗りの作業は見落としやすいので考え方をあっていても正答を出せなかつた方が数名いた。

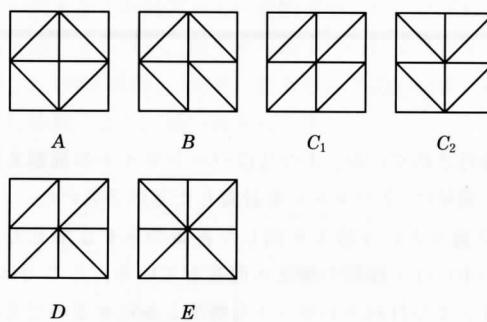


図2 基本6パターン

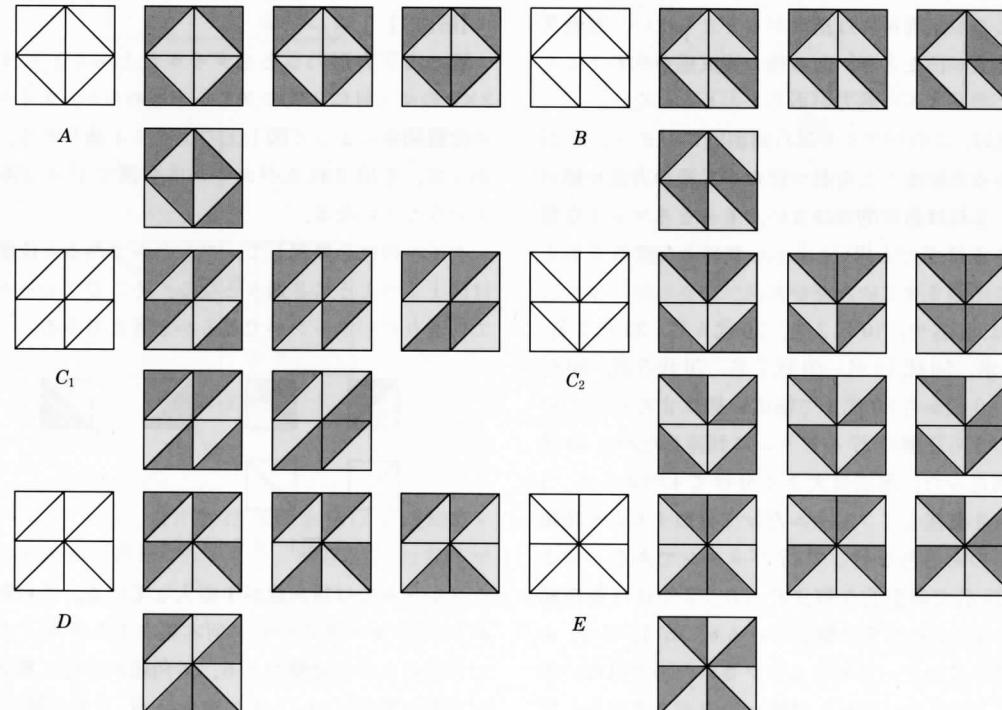


図3 色塗り

27パターンを色、回転、左右反転で移り行くパターンの数で分類すると図4になる。移り行くパターンの数が2は4パターン、4は4パターン、8は9パターン、16は10パターンになる。そして、

$$2 \times 4 + 4 \times 4 + 8 \times 9 + 16 \times 10 = 256$$

のように合計すると全体の256になると、解の吟味をしている解答もあった。

以上は小学生でも理解できるエレガントな解答だが、記号を用いて数学的に考えてみよう。 $2 \times 2$ のマス目に4枚のタイルを入れるとき、色、回転および左右反転により合同なパターンが存在する。基本パターンをeとする。回転対称は90度回転をr、180度回転をr<sup>2</sup>、270度回転をr<sup>3</sup>とする。また左右反転はy軸に対して反転なのでy、色対称をcとする。

まず、回転対称のグループ

$$e \rightarrow r \rightarrow r^2 \rightarrow r^3$$

がある。そして基本パターンeに対して左右反転のパターンyがあり、これについても回転対称のグループ

$$y \rightarrow yr \rightarrow yr^2 \rightarrow yr^3$$

がある。これら2つのグループに対してそれぞれ色対称のグループ

$$ce \rightarrow cr \rightarrow cr^2 \rightarrow cr^3 \text{ と } cy \rightarrow cyr \rightarrow cyr^2 \rightarrow cyr^3$$

があるので図5のように合計16の同値なパターンが存在する。

図6のように $4 \times 4$ のマス目をxy座標系で表し、4つのマス目の位置を第1象限から第4象限に対応させる。またタイルの種類も座標系に合わせて同図のようない位置関係で1から4までの番号をつける。

### 【解法2】

横浜市・水谷一さんと横浜市・ykさんはバーンサイドの補題を使って異なるパターンが27であることを簡単に計算されている。私はこの解法を知らなかつた。ここではふたりの解答を読み解きながら説明しよう。

パターンの集合をΩとすると、パターンの数は $|\Omega| = 4^4 = 256$ であるが、Ωには変換群Gが作用しているので、異なったパターンはバーンサイドの補題より

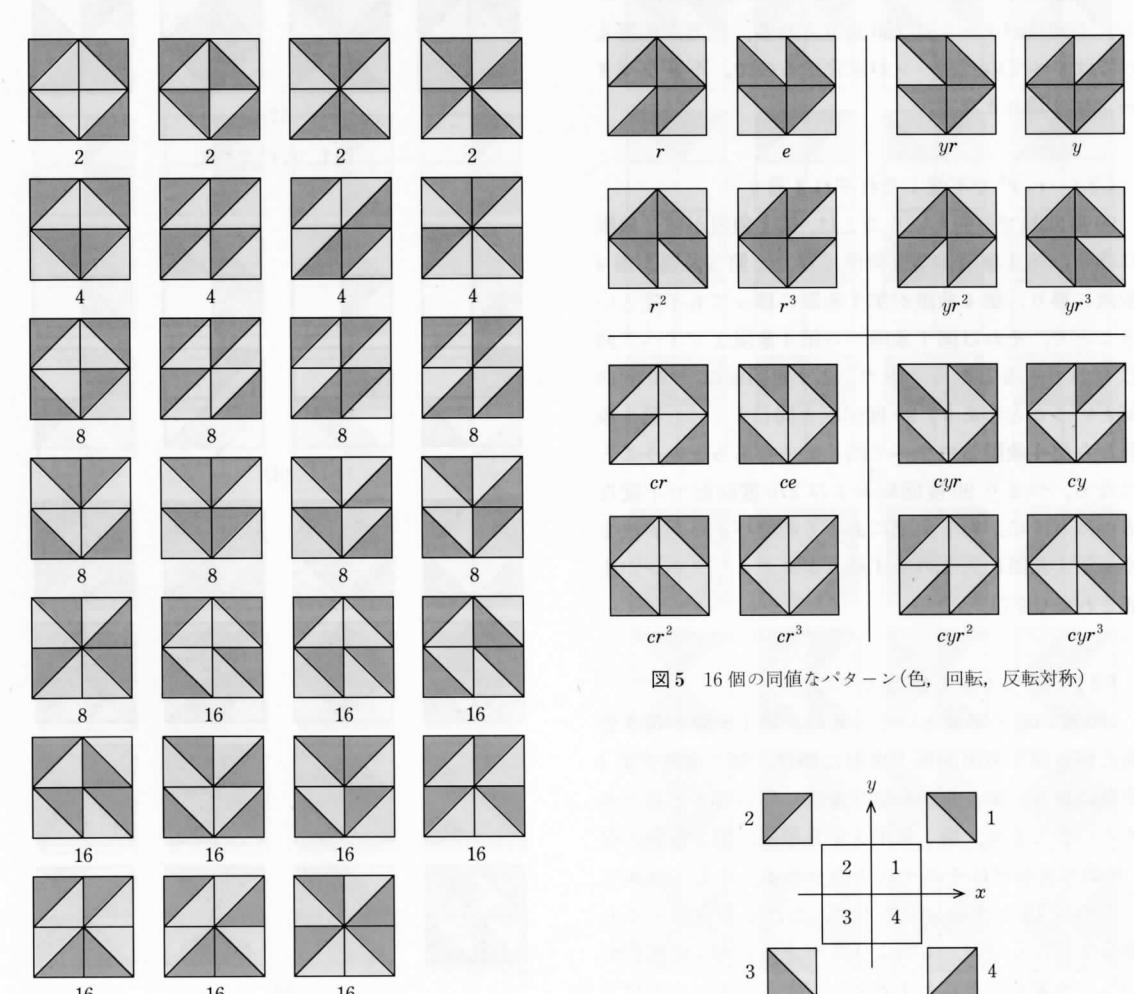


図4 合同なパターンの数

$|\Omega/G|$ として計算できる。ここで

$$G = CD$$

C:2次の巡回群(色の対称)

D:4次の2面体群(回転対称、反転対称)

Gの各要素gで変換によって不变なもの(固定されるもの)でΩの部分集合 $\Omega_g$ の要素数を数える。恒等変換をe、色変換をc、パターンの90度回転をr、左右反転をyとすると、

$$C = \{e, c\}, \quad D = \{e, r, r^2, r^3, y, yr, yr^2, yr^3\}$$

なので

$$G = CD = \{e, r, r^2, r^3, y, yr, yr^2, yr^3, c, cr, cr^2, cr^3, cy, cyr, cyr^2, cyr^3\}$$

となり、 $|\Omega_g|$ は、変換群Gの各要素gで不变な数で、表1のようになる。そして、異なったパターンの数は

$$|\Omega/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\Omega_g|$$

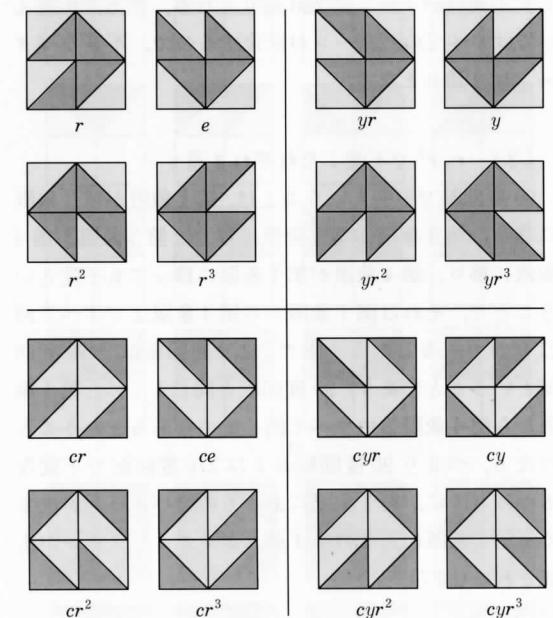


図5 16個の同値なパターン(色、回転、反転対称)

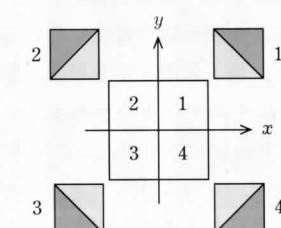


図6 座標系とタイルの番号

$$= \frac{1}{2 \times 2 \times 4} (256 + 4 \times 4 + 10 \times 16 + 1 \times 0) \\ = 27$$

と簡単に計算される。式と表はykさんのものを参考にして作成した。水谷一さんは、これら数値の計算法を詳しく説明されているが、初めての読者のために図を加えてわかりやすく説明していこう。

表1 変換によって不变なもの数

D	C	e	c
e		$4^4 = 256$	0
$r, r^3$		4	4
$r^2$		16	16
$y, yr^2$		16	16
$yr, yr^3$		16	16

#### (1) $e, c$ で不变：256通り、0通り

恒等変換  $e$  ではすべてのパターンが変化しないから、不变なパターンは 256 通りとなる。一方、色替え  $c$  ではすべてのパターンが変化するので、不变なパターンは 0 通りとなる。

#### (2) $r, r^3$ で不变：それぞれ4通り

90 度回転で不变ということは、第1象限が第2象限に移り、第2象限が第3象限に移り、第3象限が第4象限に移り、第4象限が第1象限に移っても不变ということで、それは第1象限から第4象限まですべて同じものであるということだ。270 度回転は -90 度回転ということであり、90 度回転と同じように、第1象限から第4象限まですべて同じものであるということになる。つまり 90 度回転および 270 度回転で不变なものはともに、第1象限にあるものでパターンが決まる。第1象限に入るのは 4 通りがあり 4 パターンが生成される(図 7)。

#### (3) $r^2$ で不变：16通り

180 度回転で不变ということは、第1象限が第3象限に移り第3象限が第1象限に移り、第2象限が第4象限に移り、第4象限が第2象限に移っても不变であるということだ。第1象限と第3象限、第2象限と第4象限の組合せはそれぞれ4通りある。そして生成されるのは 16 パターンであるが、これらを作図する必要はまったくない。このようなパターンが 180 度回転( $r^2$ )で不变となることをイメージとして示しただけである(図 8)。

#### (4) $y$ で不变：16通り

左右反転ということは  $y$  軸に関して裏返すということである。第1象限と第2象限が交替し、第4象限と第3象限が交替するのであるから、第1象限と第4象限にあるものがパターンを決めるところになる。

第1象限および第4象限に入るのはそれぞれ4通りあり、第1象限と第4象限の組合せは 16 通りとなり、16 パターンが生成される(図 9)。

#### (5) $yr^2$ で不变：16通り

$y$  軸に関して対称移動して 180 度回転して不变とい

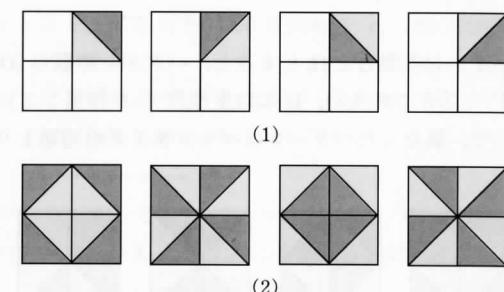


図7  $r, r^3$  で不变

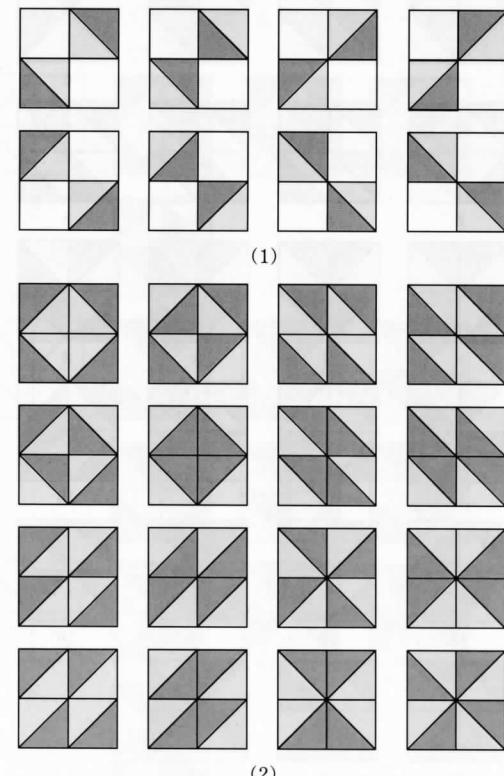


図8  $r^2$  で不变

うことは、パターンが上下反転つまり  $x$  軸に関して対称になっていることだ。第1象限と第4象限が交替し、第2象限と第3象限が交替するのであるから、第1象限と第2象限にあるものがパターンを決めるところになる。第1象限および第2象限に入るのはそれぞれ4通りあり、第1象限と第2象限の組合せは 16 通りとなり、16 パターンが生成される(図 10)。

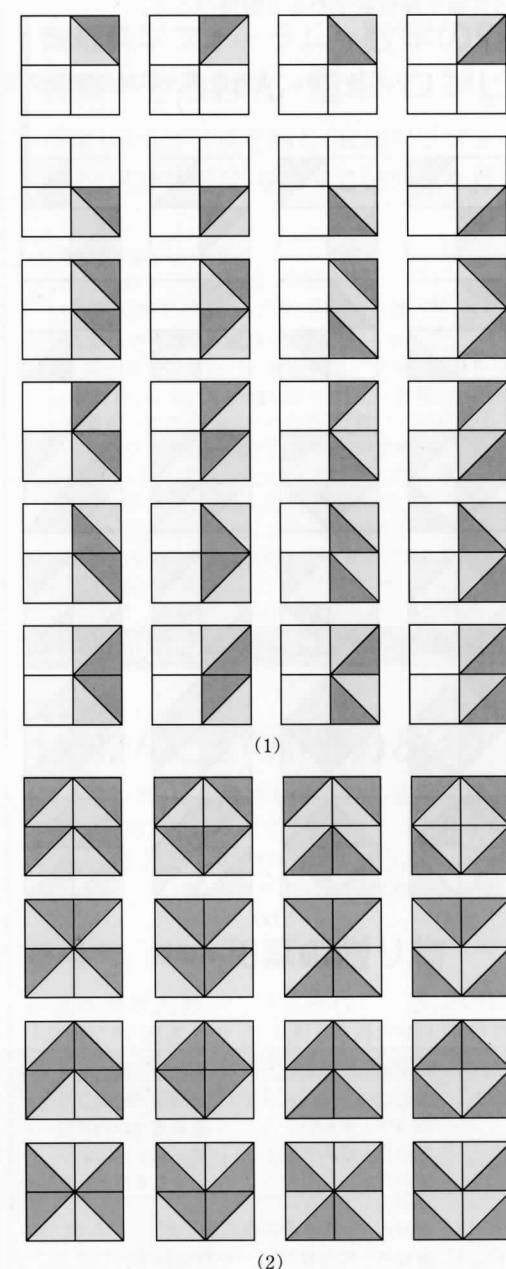


図9  $y$  で不变

#### (6) $yr^2$ で不变( $y = -x$ 軸に対称)：16通り

$y$  軸に関して対称移動して 90 度回転するということは  $y = -x$  軸に関して対称と同じである。これが不变ということは、第2象限と第4象限の組合せおよび第1象限と第3象限の組合せが  $y = -x$  軸に関して対称であることだ。第2象限と第4象限、第1象限と第3象限の組合せはそれぞれ4通りあり、これらは独立しているので組合せは合計 16 通りになり、16 パ

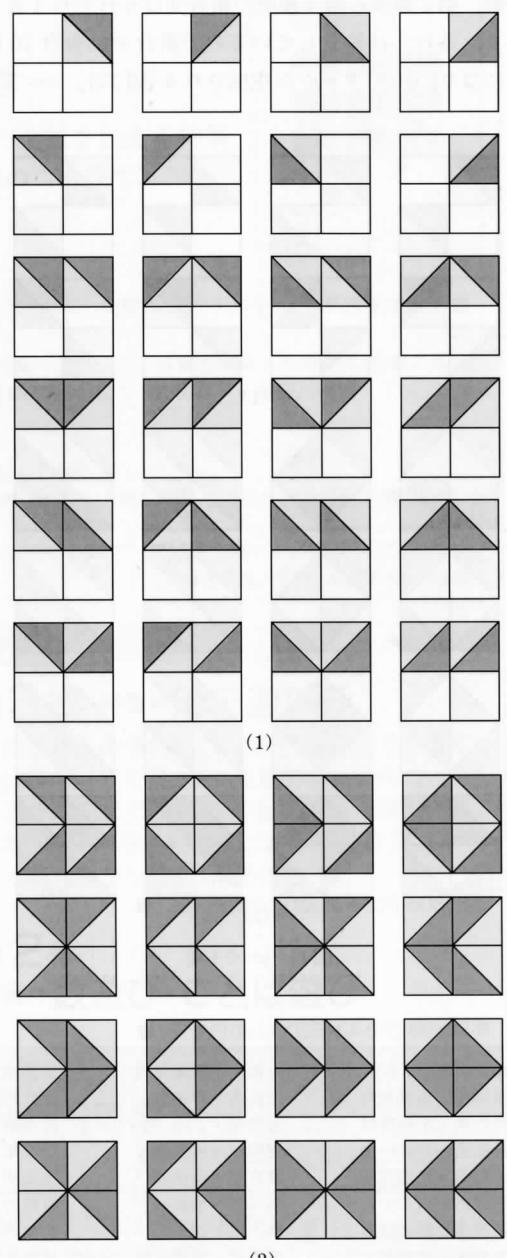


図10  $yr^2$  で不变

ターンが生成される(図11)。

- (7)  $yr^3$ で不变( $y = x$ 軸に対称): 16通り  
 $y$ 軸に関して対称移動して270度回転するということは、 $y$ 軸に関して対称移動して-90度回転するということであり、これは $y = x$ 軸に関して対称である。これが不变ということは、第1象限と第3象限の組合せおよび第2象限と第4象限の組合せがそれぞれ $y = x$ 軸に関して対称であることだ。第1象限と第3象限、第2象限と第4象限の組合せはそれぞれ4通りあり、これらは独立しているので組合せは合計16通りになり、16パターンが生成される(図12)。

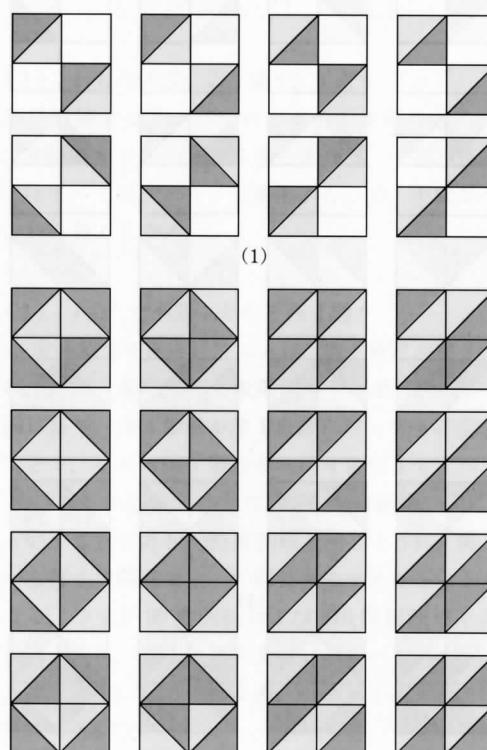


図11  $yr^3$ で不变

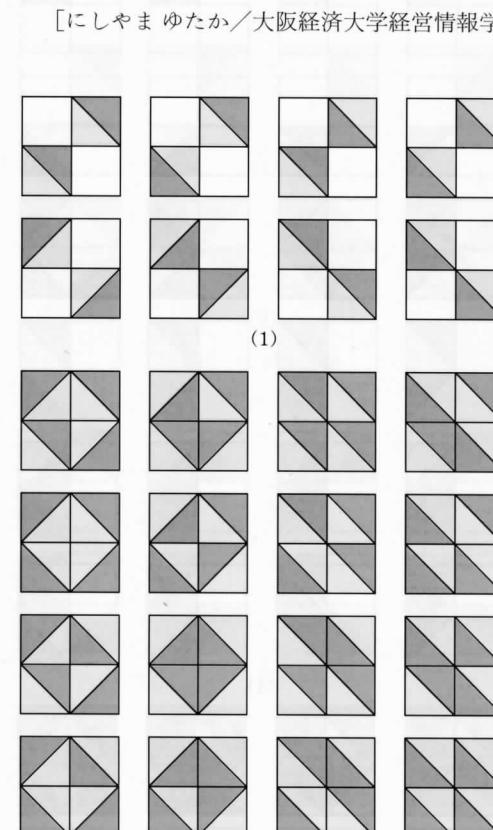


図12  $yr^3$ で不变

色対称の $cr, cr^2, cr^3, cy, cyr, cyr^2, cyr^3$ についても、同様にして表1のように不变な数は計算できるが、色が変わることを考慮しなければならず、作図には少し思考の訓練がいる。以上2つの解法を紹介したが、パソコンなどに頼らず紙と鉛筆で解けることの素晴らしさを教えていただいた。特に横浜市・水谷一さんと横浜市・ykさんには感謝します。バーンサイドの補題はコーチー・フロベニウスの補題、ボリヤの定理とよばれることもある。この補題の証明や具体例については群論や離散数学の本を参照のこと。

[にしやま ゆたか／大阪経済大学経営情報学部]

# 数学文化 第6号

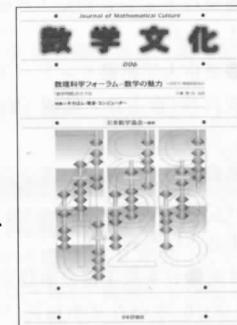
Journal of Mathematical Culture 006

日本数学協会=編集

## 数理科学フォーラム=数学の魅力

### 特集=そろばん・電卓・コンピューター

作家・小川洋子氏を囲む《数理科学フォーラム》の全貌を伝える特集、および《計算器具》をめぐる諸問題を考える特集の二本立て。



#### 目次

##### 数理科学フォーラム

楽しく数学を学ぶ方法…岡部恒治

[座談会]数学の魅力—『博士の愛した数式』の著者小川洋子氏とともに…岡部恒治・小川洋子氏・宇野勝博・菅原邦雄

##### 特集=そろばん・電卓・コンピューター

計算用具の手ざわり…菅原邦雄／グラフ電卓を使った私の授業…公庄庸三／珠算と電卓…西博三／「割算の九九」(割り声)について…村上耕一／「古い計算力」は陳腐化し、「電卓の時代」になったのか?…有田八州穂

巻頭言:「できる」より「わかる」が尊い／新井紀子

トピックス:数学月間のすすめ…片瀬豊・谷克彦

ルイス・キャロルという社会学者と彼の選挙理論の論文…細井勉

エッセイ:『博士の愛した数式』をめぐって…瀬山士郎／食事療法と連立方程式…中根美知代／ノーベル賞受賞者が81人…西山豊／一つ、二つ、あとは沢山…内林政夫

論説:Laméの定理…高田加代子／変分法への寄与…E・フツサール(佐藤愛子訳)  
BOOKS／パズル

■好評発売中!／定価1575円(税込)  
■B5判／ISBN 4-535-60236-0

★各B5判

#### Back Number

##### 第5号

### 特集=ほんとうの計算力とは?

「百ます計算」に代表されるドリル式計算練習で本当に計算力がつくのだろうか? 実践を踏まえて、さまざまな角度から考察する。

■1470円(税込)／ISBN 4-535-60235-2

##### 第3号 特集=形で遊ぼう

身のまわりの慣れ親しんだ形、遊びのなかの形、教科書のなかで見た形、風景のなかの形など、さまざまな形にひそむ数理を探る興味深い特集。また、三次方程式を実際に算木を操作しながら解く話もわかりやすく面白い。

■1365円(税込)／ISBN 4-535-60233-6

##### 第4号 特集=和算の贈り物

いま和算がおおいに注目されている。2004年12月に開催された企画展「和算の贈り物」での講演会の内容や、教室で意欲的に和算を取り上げている教師たちの実践、ある博物館の試みなどを紹介する。

■1470円(税込)／ISBN 4-535-60234-4

##### 第2号

### 特集=数遊び・ことば遊び

■1575円(税込)／ISBN 4-535-60232-8

##### 第1号

### 特集=円周率π

■1575円(税込)／ISBN 4-535-60231-X

〒170-8474 東京都豊島区南大塚3-12-4 TEL:03-3987-8621 FAX:03-3987-8590  日本評論社  
ご注文は日本評論社サービスセンターへ TEL:049-274-1780 FAX:049-274-1788 <http://www.nippon.co.jp/>

●正解者(40名)	京都市・黄瀬正敏	三島市・早川賢	小矢部市・野手明	野田市・藤川清
滑川市・高見次郎	広島市・寺迫誠	北九州市・田中信輝	つくば市・yaz	桶川市・秋山佳子
鳥取県・小林保雄	東京都・	豊中市・瀬川秀雄	横浜市・東島明子	豊田市・白山義和
日立市・伊藤一光	浦安市・桂寛道	山口市・奈良岡悟	尼崎市・松尾武志	岐阜県・前田仁
山口県・高橋秀明	東京都・浜田明巳	福山市・山本哲也	千曲市・山岸昭善	さいたま市・西巻竹男
鯖江市・山本ジョージ	横浜市・水谷一	豊前市・林道宏	松江市・下房俊一	
新潟市・熊木辰雄	横浜市・yk	徳島市・古川民夫	静岡市・興津優史	
日立市・木村奎二	東京都・川崎市雄	青森県・高坂剛	鎌倉市・石川共	
横手市・佐藤工	静岡市・鈴木丈喜	東京都・Y.K.	松戸市・広川久晴	