9 ジッヒャーマン・ダイス

出題者●西山 豊

問題1 2つのサイコロを使って目の和を求めると，目の和は2から12まで分布するが，これと同じ確率分布を持つサイコロがあるとしたなら，それは

$$1, 3, 4, 5, 6, 8, \quad と \quad 1, 2, 2, 3, 3, 4$$

の組合せであり，これがユニークな解であることを証明せよ．

問題2 サイコロを正4面体または正8面体としたとき，目の和の確率分布が普通のサイコロと同じになるような数字の組合せが存在するか調べよ．

●── サイコロの目の和

良い問題，良い答え，良い解答とはどういうものを言うのだろうか．私の考えでは，良い問題とはすべての人に問題の意味が一目瞭然であることだ．数学の未解決問題の中には問題の意味すらわからないというのがあるが，これは数学愛好家にとっては良い問題とはいえない．フェルマーの最終定理は数学が苦手な人でもわかる良い問題である．良い答えとは，形が美しいとか解がユニークであるとか意外性があるとかいうものであろう．答えを見るだけでも感動する幾何学のモーレーの定理であろうか．良い解答とは高校数学程度の知識でそれを駆使すれば解ける，思いがけないエレガントな解答のことを言う．高等な数学を使えば明らかであるというのは，あまりよくない．これから紹介するサイコロに関する問題は，私が近年めぐりあった上記のすべてを満たした久々の良問である．

●── 問題1について

読者は，この組合せを見て，こういうことがあるのかと驚くことだろう．そこで目の和について確認計算をしてみよう．普通のサイコロは1から6までの目がある．2つのサイコロをサイコロ1とサイコロ2として，目の和を表計算ソフトで作成してみる(図1)．目の和が2は1回，目の和が3は2回，…，目の和が7は6回，…，目の和が12は1回というように，目の和が7のときが最大で度数分布は直線的に増減する三角形の形をしている．

さて，問題となっているサイコロについて計算をしてみよう．サイコロ1とサイコロ2の数字を

$$1, 3, 4, 5, 6, 8 \quad と \quad 1, 2, 2, 3, 3, 4$$

に変え，2つのサイコロの目の和を計算して(図2)度数分布をとってみると普通のサイコロと同じ分布をするのである．読者は，このことを確認してほしい．

サイコロ2

サイコロ1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

図1 普通のサイコロ

サイコロ2

サイコロ1	1	2	2	3	3	4
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
6	7	8	8	9	9	10
8	9	10	10	11	11	12

図2 確率分布が同じサイコロ

[解答1] 試行錯誤による方法

解法は大きく分けて3つあるが，まず，誰でもができる一般的な方法について説明しよう．

目の和が2は度数が1回であるから，2つのサイコロの最小の目は互いに1でなければならないことはすぐわかる．数字が未決定のところを変数xで表記すればつぎのようになる．

$$1, x, x, x, x, x \quad と \quad 1, x, x, x, x, x$$

また目の和の最大12も度数が1回であるから，最後の数字は足して12とならねばならない．そこで仕上がりは，つぎのようになる．

$$1, x, x, x, x, 10 \quad と \quad 1, x, x, x, x, 2$$
$$1, x, x, x, x, 9 \quad と \quad 1, x, x, x, x, 3$$
$$1, x, x, x, x, 8 \quad と \quad 1, x, x, x, x, 4$$
$$1, x, x, x, x, 7 \quad と \quad 1, x, x, x, x, 5$$

そして残りのxの数字をコツコツと根気よく調べていけば良いことになる．真ん中にある4つのxにくる数字であるが，左端の小さいほうは1を含んではだめで2以上であり，右端の大きいほうは最大数を含んではだめでそれ未満である．でたらめに数字をあてはめるのではなく，条件を考え，条件にあった数字だけを選んでいくとこの方法も苦痛ではなくなり，紙と鉛筆さえあれば答えを求めることができる．読者は確かめること．

正解である

$$1, 3, 4, 5, 6, 8 \quad と \quad 1, 2, 2, 3, 3, 4$$

の数字の組合せを眺めてみると，それぞれの目の平均が4.5と2.5であり，平均の和が7となる．また数字の配置は左右対称で度数は山形となっている．普通のサイコロは目の平均が3.5で平均の和が7である．平均の合計が等しいこと，数字がバランスよく配置されていること，このあたりに確率分布が同じになる必要条件があるのかも知れない．

[解答2] パソコンによる方法

試行錯誤による解答はエレガントとは言えないが，度数分布が同じであるサイコロを自分で見つけることができる．しかし，解の見落としということがあるかも知れない．それをカバーするのはパソコンである．パソコンを使うのは数学では亜流と言われるかも知れないが，今では無視できない存在だ．

プログラム言語としてはVisual BasicやC言語がある．読者が得意な言語を用いれば良い．何も考えずにプログラムを組めば演算時間がかかって結果がでなくなることがある．たとえば，1つのサイコロごとに6個の数字を決めるから6つのループ，サイコロは2つあり2倍のループが必要であるから，合計12個のループとなる．そして数字は1から6までの出方があるから6通りの検査が必要である．これらの数値をすべて調べつくしても良いが，あまりよい方法ではない．

プログラムを作成する前に，紙と鉛筆で答えを求めた解答1はプログラムを効率よく作成するための予備調査となっている．サイコロの6個の数字を決めるが，最初の数字1と最後の数字(max)は固定で，その間の4個の数字だけを検討すれば良い．また左から右に並ぶ数字は昇順になっているからすべての数字を調べる必要がない．このような点に注意すればプログラムは効率よく解を求めることができる．

プログラムを実行させると，サイコロの目の和が同じになるのは

$$1, 3, 4, 5, 6, 8 \quad と \quad 1, 2, 2, 3, 3, 4$$

の組合せがあり，この場合だけであるということが確認できる．

ここまで来ると，正6面体以外もこのような現象が起こるのでは，と読者の興味が移っていくかも知れない．そこでつぎの問題2を提示する．

●── 問題2について

正4面体なら解答1の紙と鉛筆でも可能だが，正8面体はやはりパソコンの威力を借りないわけにはいかない．正4面体の場合はつぎの1つの解

$$1, 3, 3, 5 \quad と \quad 1, 2, 2, 3$$

が，正8面体の場合はつぎの3つの解

$$1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9 \quad と \quad 1, 2, 2, 3, 5, 6, 6, 7$$
$$1, 2, 5, 5, 6, 6, 9, 10 \quad と \quad 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6$$
$$1, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 11 \quad と \quad 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5$$

が存在することがわかる．プログラムを少し変更するだけで，答えを見つけることができるので読者は確かめてみること．

サイコロの面の数が多くなるにつれて解のパターンが多くなることが予想される．サイコロを正12面体や正20面体とした場合もプログラムで処理できるのではと思われるが，解答2はやはり限界があるのだ．

[解答3] 多項式の因数分解による方法

マーチン・ガードナーの古い著作の中にこのサイ

コロの問題が紹介されている．そして，生成関数というのがあって，それは

$$P(x)=\frac{1}{6}(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6) \qquad (1)$$

という形をしており，これを使えば証明できるとしている．1970年代に紹介されてから現在に至るまで30年を経過するが，表現方法の違いはあるが上記の多項式を使った証明が，この問題の模範解答となっている．

式(1)をどう読むかであるが x に値を代入して式の値を求めるという種類のものではない．証明の手段として多項式の次数と係数が使われているということである．だから次数と係数に注目することに慣れていただきたい．

項の数は全部で6個あるが，一般項 ax^k は「サイコロの目の和が k となるのは a 個ある」と読む．次数は目の和に，係数は度数に対応している．具体的に見ていこう．普通のサイコロが1つの場合は目が1は度数が1回，目が2は1回，…，目が6は1回である．だから，

$$1x^1, 1x^2, \cdots, 1x^6 \quad \text{つまり} \quad x, x^2, \cdots, x^6$$

となる．そして，それぞれが同じ確率でおこり，確率は全体を足して1でなければならないから6で割ってある．

サイコロが2つの場合は式(1)の左辺，右辺をそれぞれ2乗することに対応する．そして多項式を展開したときの次数と係数が目の和と度数を示していることになる．以上のことを数式で確認してみるが，式を見やすくするため式(1)の両辺を6倍して分母を取り払っておく．

$$6P(x)=x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6 \qquad (1')$$

$$\{6P(x)\}^2=x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12} \qquad (2)$$

式(2)の右辺に注目すると，展開された多項式の各項の次数と係数がサイコロの目の和と度数の関係，確率分布をうまく表しているのがわかる．たとえば $5x^6$ はサイコロの目の和が6となるのは5回である，$4x^9$ は目の和が9となるのは4回である，と読む．問題を解くために必要なのは，式(2)の右辺が因数分解できるとしたら，どのような形になるかである．因数分解の形が式(1)の多項式になるなら，それは普通のサイコロとなるであろう．そうではなく，別の多項式の積として因数分解できたなら，それが解となるのである．こんなことができるのだろうか具体的に見ていこう．

式(1′)に戻って，つぎのように式を変形してみよう．各項に x の因数があるから，まず x で各項をくくると $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$ の項が残る．よく知られているように $\sum_{i=0}^{k-1} x^i$ は $(x-1)$ を掛けると (x^k-1) の形になるので，これを応用する．分子に $(x-1)$ を掛け，分母にも $(x-1)$ を掛けておくと式の値は変化しないことになる．一般に (x^k-1) の形は因数分解がしやすく，その結果，多くの因数ができる．たとえば (x^6-1) は

$$(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$$

となる．

以上をまとめて書いてみるとつぎのようになる．

$$\begin{aligned}6P(x)&=x(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\\&=\frac{x(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)}{x-1}\\&=\frac{x(x^6-1)}{x-1}\\&=\frac{x(x^3-1)(x^3+1)}{x-1}\\&=\frac{x(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)}{x-1}\\&=x(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1) \qquad (3)\end{aligned}$$

式(3)が示すように，$P(x)$ は4つの項の積として因数分解できたことになる．式(1)からは想像がつかない形である．式(3)の左辺と右辺を単純に2乗すると次のようになる．

$$\{6P(x)\}^2=x^2(x^2+x+1)^2(x+1)^2(x^2-x+1)^2 \qquad (4)$$

問題を解くために式(4)の右辺を2つに分解するわけだが，でたらめに振り分けてはいけない．2乗したから項の数は全部で8個あることになる．2つに振り分けるには条件があるのでそれを検討する．式(3)に戻って各項を検討すると，まず x はサイコロでは1の目に対応するので，これはどちらにも入れておかねばならない．残る3項について $x=1$ のときの値を計算してみると，

$$(x^2+x+1)=3$$

$$(x+1)=2$$

$$(x^2-x+1)=1$$

となる．左辺の $P(x)$ には6が掛けてあるから，右辺には6の因数がこなければバランスがとれない．そのためには (x^2+x+1) の3と，$(x+1)$ の2の項が必ず1個ずつ含まれねばならない．$3\times2=6$ で6の数字がバランスがとれクリアできる．一方，(x^2-x+1) は値が1であるから，どちらに含まれようが関係ない．$(x^2-x+1)^2$ をどのように振り分けるかであるが，双方のサイコロに1項ずつ含まれるなら，それは普通のサイコロと同じになるであろう．片方だけに含まれるなら，それは別のサイコロとなり，求めようとする解になる．

以上の検討結果を式(5)で表しておく．左辺は普通のサイコロ $P(x)$ が2個を意味し，右辺は別のサイコロ $Q(x)$ と $R(x)$ の組合せを意味している．それぞれの多項式の積を展開すると式(2)で示した右辺と同じになる．つまりサイコロの目の和の確率分布が同じになるのである．

$$\begin{aligned}\{6P(x)\}^2&=\{6Q(x)\}\{6R(x)\}\\&=\{x(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)^2\}\\&\quad\times\{x(x^2+x+1)(x+1)\}\\&=(x^8+x^6+x^5+x^4+x^3+x)\\&\quad\times(x^4+2x^3+2x^2+x) \qquad (5)\end{aligned}$$

ここで解の多項式は

$$Q(x)=\frac{1}{6}(x^8+x^6+x^5+x^4+x^3+x) \qquad (6)$$

$$R(x)=\frac{1}{6}(x^4+2x^3+2x^2+x) \qquad (7)$$

となる．多項式の各項の次数と係数はサイコロの目の和とその度数を示しているのであるから，サイコロ Q の目は

8, 6, 5, 4, 3, 1

の数字を持ち，サイコロ R の目は

4, 3, 3, 2, 2, 1

の数字を持つことになる．

この数字は冒頭で示した正6面体の場合の唯一の解と一致するのである．以上が多項式の次数と係数を応用した証明法であるが，見事と言うしか表現の方法がない．

［問題3］ サイコロを正12面体，正20面体としたとき，サイコロの目の和が同じになる数字の組合せを解答3により求めよ．

●── 問題のルーツ

以上，サイコロの問題を紹介したが，このような面白い問題を誰が考え，またエレガントな解答を誰が思いついたのであろうか．

問題の発端は1978年2月号の『サイエンティフィック・アメリカン』誌に掲載されたマーチン・ガードナーの記事のようである[1]．記事を読むと，この奇妙なサイコロを最初に発見したのはジョージ・ジッヒャーマン(George Sicherman)であると紹介されている．彼が証明法を知っていたかは定かでない．

そして，この雑誌の記事を見た読者から多くの証明に関する手紙がガードナーに届いたが，エレガントな解法はジョセフ・ガリアンやデュアン・ブロラインに代表される多項式を用いるものであったとガードナーはその後の著書で書いている．2つの論文を参考文献としてあげておく[2], [3]．

現在このサイコロはクレイジー・ダイスまたは発見者の名前をとってジッヒャーマン・ダイスと呼ばれている．ジッヒャーマンはこのサイコロを商品として売り出しているが，実際のカジノでは使われていないらしい．サイコロの目の和の分布が同じになるというのは数学者にとっては魅力的な話題であるが，賭博の世界は別ということだ．

参考文献

［1］ Martin Gardner, *Mathematical Games*, Scientific American, **238** (1978) 19-32

［2］ Joseph A. Gallian and David J. Rusin, *Cyclotomic Polynomials and Nonstandard Dice*, Discrete Mathematics, **27** (1979) 245-259

［3］ Duane M. Broline, *Renumbering of the Faces of Dice*, Mathematics Magazine, **52** (1979) 312-315

［にしやま ゆたか／大阪経済大学経営情報学部］