エレガントな解答をもとむ

【解答】●出題 2008年1月号

出題 1 ●出題者 西山 豊

(1) 1から10までの数字が5個ずつ2段に並んでいます．

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

上段の数字は下段の数字より小さく，左側の数字は右側の数字より小さいという条件を満たすとすれば，

1	2	5	7	8
3	4	6	9	10

という並べ方もできます．このような並べ方は全部で何通りあるでしょうか．

(2) 1から$2n$までの数字をn個ずつ2段としたときの一般式を求めてください．

解答 1

応募者数は78名で，年齢分布は10代が4名，20代が7名，30代が8名，40代が21名，50代が26名，60代が5名，70代が5名，80代が2名でした．そのうち正解者は59名で，(1)と(2)の両方に正解の人を正解者としました．

また，多くの方からコメントをいただきました．カタラン数については本誌「エレガントな解答をもとむ」に数回出題されていること，雑誌『大学への数学』に解説の記事が何度も掲載されていること，大学入試問題に出題されていること，数学オリンピックの予選問題にも出題されたことがあるなど，この問題は受験生にはポピュラーな問題であるということでした．

実のところ，私はカタラン数という言葉は知っていましたが，その内容については詳しく知りませんでした．知人から問合せがあった数学クイズに今回の問題があり，その答えが42通りで，公式が$\frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$であるとだけ示されていました．

カタラン数を知らないのですから，強引にこの公式を証明しようとして泥沼に入りました．10個の数字の中から5個の数字を選んで上段に入れるとすると，その組合せは${}_{2n}C_n$になります．これは想像がつきます．しかし，そのうち合格するものを選ぶために，なぜ$n+1$で割るのか，その理由がわからず，1か月近く私を悩ませました．カタラン数の知識がなくて果たして答えが出せるか疑問に思い，エレガントな解答があるのかを問いかけるのが出題の意図です．

◉── 解答 1(条件付き最短経路)

59名の正解者のうち43名はカタラン数の最短経路の問題として解答されていました．以下，その解法を示します．

数字を上段に置くことを右へ1移動すること(→)，下段に置くことを上へ1移動すること(↑)にします．問題文にある2つ目の例では，1から10までは，

→ → ↑ ↑ → ↑ → → ↑ ↑

に対応し，図1のようにAからBへの経路をたどることになります．つまり，条件を満たす数字の並べ方は，AからBへの最短経路のうち，対角線を越えない経路の総数をもとめる問題と同じになります．そして，数え上げにより42通りになります(図2)．

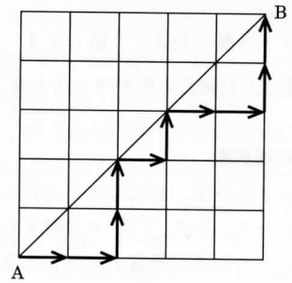


図1

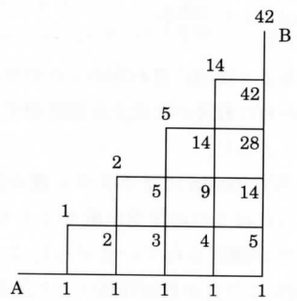


図2

対角線ABを越えるとは，対角線ABの1つ上側にある直線lと共有点を持つということになります．AからBへの最短経路のうち，直線lと共有点を持つ経路の数を考えてみましょう．

図3の太線のようにAからBの経路が，直線lと共有点を持つものとします．初めての共有点をPとして，太線のP以降の部分をlに関して折り返してできるA→P→B′を考えると，これはA→B′の最短経路となっています．逆に，この経路は必ずlを突破していますので，初めての共有点以降をlに関して折り返せばA→Bはlと共有点を持つ最短経路となっています．

このように対角線ABを越えてAからBに至る経路とAからB′に至る経路が一対一に対応しています．AからBへ至る経路の数は${}_{10}C_5$，AからB′へ至る経路の数は${}_{10}C_4$であるので，条件を満たす経路の数は

$${}_{10}C_5-{}_{10}C_4=252-210=42$$

通りになります．

同様にして，1から$2n$までの数字の場合は，

$$\begin{aligned}{}_{2n}C_n-{}_{2n}C_{n-1}&=\frac{(2n)!}{n!\,n!}-\frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}\\&=\frac{(2n)!}{n!\,n!}\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\\&=\frac{{}_{2n}C_n}{n+1}\end{aligned}$$

となります．

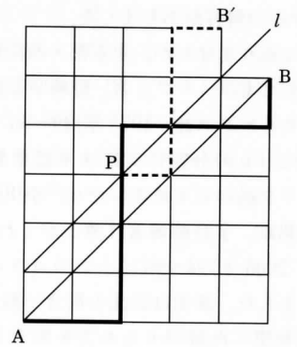


図3

◉── 解答 2(漸化式，母関数など)

漸化式から一般公式を仮定して数学的帰納法で証明したもの，カタラン数を母関数から証明したものなどが16名ありました．

ykさんは，題意の数はV字溝の一方の斜面に沿って，上方へとレンガを2段に積む，または積まれたレ

● 10代
東京都・丸亀泰二
京都市・渡辺伯陽

● 20代
八王子市・村山健太
水戸市・島抜秋則
東広島市・松原和樹
金沢市・塚田大祐

● 30代
京都市・黄瀬正敏
半田市・水野修
京都市・$\eta\rho$
香取市・河野智一
東京都・山口拓司
市川市・溝内秀男
東京都・范揚武

● 40代
川崎市・新井正志
徳島県・新矢隆
日立市・伊藤一光
京都市・清洲早紀
鯖江市・山本ジョージ
茂原市・飴田孝儀
川崎市・河原崎純一
福山市・山本哲也
東京都・升田春夫
豊前市・林道宏
昭島市・内藤康正
千曲市・山岸昭善
京都市・知魚楽
さいたま市・荻原紹夫
三島市・早川賢
東京都・高雄保嘉
秋田市・千葉隆
豊田市・白山義和
桶川市・秋山佳子

● 50代
東近江市・平岩治司
横浜市・yk
東京都・ζ
静岡市・鈴木丈喜
横浜市・水谷一
山口県・高橋秀明
加須市・小林国雄
松本市・高村薫
宇都宮市・宇留野隆
東京都・宮村恵一
奈良県・野崎伸治
帯広市・浅田智子
大分市・樋口恒生
三条市・加ト
三鷹市・石川和弘
山口市・奈良岡悟
東京都・Y.K.
名古屋市・山本長晴
札幌市・安藤和夫
つくば市・yaz
三重県・奥田真吾

● 60代
柏原市・名倉嘉尊
松江市・下房俊一

● 70代
滑川市・高見次郎
東京都・山本彬也
飯田市・小林博省

● 80代
長岡京市・クスコ

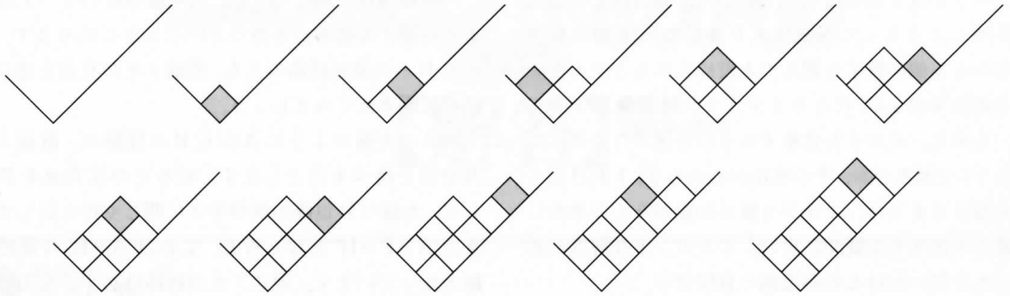


図4　レンガの積み方

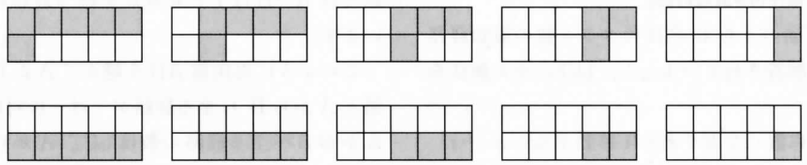


図5　10個の鍵

ンガを崩さずに取り去る方法の数と考えることができるとコメントがありました．図4のようにレンガの積み方にすれば問題がもっとよかったかもしれません．

◉── 解答3（ヤング図形とヤング盤）

私を含めてこの問題を解かれた方は，2段ではなく3段でなら答えはどうなるのかと発展問題を考えられたことでしょう．この心をくみ取るかのように水谷一さんと $\eta\rho$ さんの解答がありました．

応募者ではありませんが，東京都・西山輝夫さんは参考資料としてC. ベルジュ著，野崎昭弘訳『組合せ論の基礎』(サイエンス社，1973年)49〜55ページに掲載されている「n の分割に対応する標準盤の数え上げ」のコピーを送ってくださったり，小川洋子，岡部恒治，菅原邦雄，宇野勝博著『博士がくれた贈り物』(東京図書，2006年)94〜95ページのコラムを紹介していただきました．証明は誌面の都合で割愛するとして，標準盤を使った解のもとめ方を紹介しましょう(図5)．標準盤は「ヤング盤」や「鍵盤」とも呼ばれています．

箱が5個ずつ2段で合計10個あります．まず，箱を1つ選び，その箱と，その右と下にある箱をすべて塗りつぶしてできる形を考え，それを鍵と呼びます．鍵の数は箱の数だけあります．箱は10個ですから鍵は10個あります．

塗りつぶされた箱の個数は，上段が6個，5個，4個，3個，2個，下段が5個，4個，3個，2個，1個です．これらを掛け合わせたもので，箱の数の階乗10!を割ると，

$$\frac{10!}{6\times5\times4\times3\times2\times5\times4\times3\times2\times1}=42$$

となります．また，n 個を2段にした場合は，

$$\frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$$

通りで，カタラン数の公式と一致します．この公式は強力で，3段以上の場合の解がもとまります．

◉── 解答4（超過数）

最初に述べましたが，私はカタラン数の知識がまったくなかったため，公式 $\frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$ を理解するのに大変苦労しました．この公式が解答1で示したように最短経路から求めて式変形により，

$${}_{2n}C_n-{}_{2n}C_{n-1}=\frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$$

となるならあまり疑問に思わなかったのですが，これを知らないために最後の公式を直接証明する方法はないか，と考えました．

英語版のWikipediaにはカタラン数の詳しい解説があり，そこには3つの証明が載せてあります(日本語版はすべてが翻訳されていません)．1つ目が母関数による証明，2つ目が最短経路による証明，そして3つ目が超過数による証明です．7×7のマス目でAから

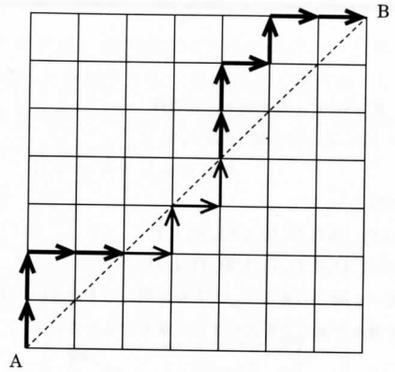
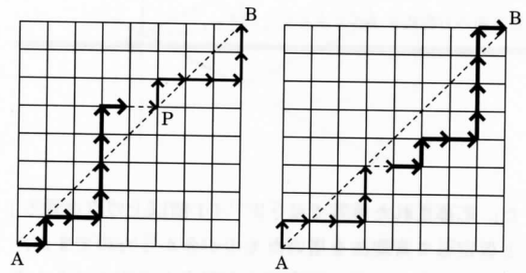


図6　超過数＝5の経路



(1) 超過数＝3　　(2) 超過数＝2

図7　超過数を減らす手順

Bへ行く最短経路を考えます．この場合，対角線ABより左上にある矢印(太線)で上向きの矢印(↑)を数えます．図6では↑が5個ありますから，超過数(exceedance)が5であるとします．

また，超過数は図7のような手順で1つ減らすことができます．Aから出発した矢印が初めて対角線ABを超えて左上側に行き，ふたたび対角線ABを超えて右下側に行くときの点をPとします．AからPの1つ手前の経路を太線，そこからPまでの経路を破線，PからBまでの経路を細線とします．細線と太線を，破線を中心にして入れ替えます．すると，超過数が3から2になります．

3×3のマス目について，すべての最短経路 ${}_6C_3=$

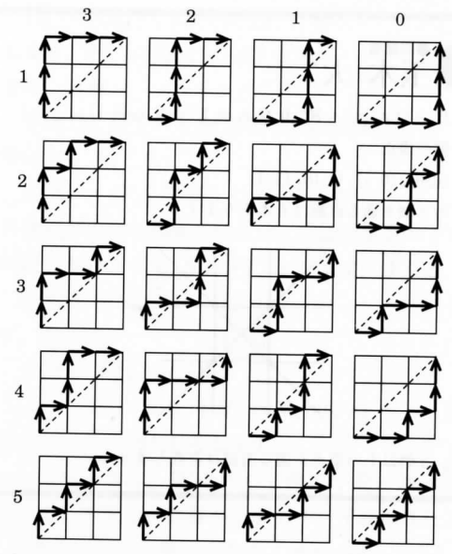


図8　${}_6C_3=20$ の全パターン(横の数字は超過数(exceedance)，縦の数字は経路(pass))

20を超過数で分類したものが図8です．対角線よりすべて下側になる経路はカタラン数 $\frac{{}_6C_3}{3+1}=5$ より，5通りです．条件を満たす経路は超過数がすべて0であり，超過数は図7に示した手順で1つずつ減らして0にまですることができます．超過数は3，2，1，0の4通りありますから，全20経路がカタラン数と超過数で説明できたことになります．

$n\times n$ のマス目については，すべての最短経路は ${}_{2n}C_n$ となります．最大の超過数は n であり，超過数は1つずつ減らして0にすることができ，超過数で分類すると $n+1$ 通りになります．最短経路が対角線を超えないのは超過数が0の場合だけです．それで，${}_{2n}C_n$ を $n+1$ で割った数が答えになります．詳しくは英語版Wikipediaのcatalan numberをご覧ください．

[にしやま ゆたか／大阪経済大学経営情報学部]