ができます．それには，T の四頂点を

$$A=\left(\frac{\sqrt{2}}{3},0,\frac{1}{3}\right),\ B=\left(-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6},0,\frac{\sqrt{6}-1}{6}\right),$$

$$C=\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6},0,-\frac{\sqrt{6}+1}{6}\right),\ D=\left(0,\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)$$

と配置します．このとき，T の xy 平面への正射影は

$$A'=\left(\frac{\sqrt{2}}{3},0,0\right),\ B'=\left(-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6},0,0\right),$$

$$E=\left(-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{12},\frac{\sqrt{6}+1}{4},0\right)$$

を頂点とする一辺 β の正三角形に含まれます(図5)．これを β 型の埋め込みと呼びます．この埋め込みでは，A と B が三角柱の稜線上にあり，A, B, C は三角柱の同じ側面上にあります．

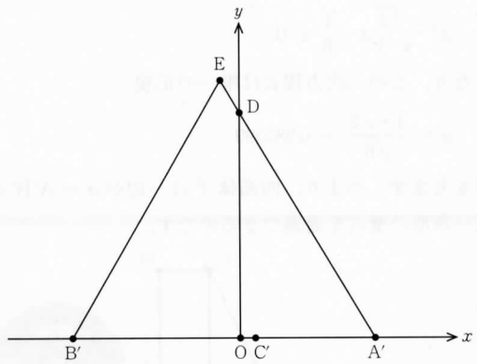

図5

正解者の解答を分類すると，α 型の埋め込みによるものが13名，β 型が5名，α 型も β 型も見つけたのが2名(ξ さんと上村拓さん)，その他の方法が6名でした．

さてこの問題の背景を説明しましょう．去年(2008年)の2月頃，隣の研究室の前原潤先生が，厚紙で作った正四面体(一辺7 cm)と，壁穴(一辺6.9 cm)を持ってきて，正四面体がその面より小さい壁穴を通過するのを見せてくれました．これは面白い，と思ってふたりでいろいろ考えた結果，次のことがわかりました．

「一辺が1の正四面体が正三角形の壁穴を通過できる必要十分条件は，壁穴の一辺が $(1+\sqrt{2})/\sqrt{6}$ 以上であることである．」

証明は完全に初等的で，ていねいにやれば高校生でも納得できるようなものですが，少し長いのでここでは述べません．そのかわり，証明のポイントと，関連する話題を紹介しましょう．まず，三角形の壁穴には，次に挙げる特殊な性質があることに注意します．

「三角形(正三角形でなくてよい)の壁穴を凸な物体が通過できるなら，その物体は，壁に垂直な方向の平行移動だけで壁穴を通過できる．」

証明は難しくありませんが，回転がまったく役に立たないというのは，私にとっては非常に意外だったので，なかなかこの事実に気づきませんでした．この性質を用いると，正三角形の壁穴で最小なものを見つける問題は，

「なるべく小さい正三角形を底面に持つ三角柱で，一辺1の正四面体 T を含むものを見つけよ」

という問題に帰着します．もし，T の三頂点が三角柱の一つの側面上にあれば，そのような性質の最小の三角柱は β 型の埋め込みになることが示せます．そこで三角柱のどの側面にも，T の頂点は高々2個しかないとします．もしこれが α 型の埋め込みでなければ，T を三角柱の内部で動かして，T のどの頂点も三角柱の側面上にないようにできること，つまり，T を含んだまま三角柱をもっと小さくできることを示します．β 型の埋め込みから，T を動かして α 型の埋め込みを直接実現することはできません．この意味で，この二つの埋め込みは証明に不可欠なものです．

János Pach は，

「小石が壁穴を平行移動で通過するなら，壁穴に垂直な方向の平行移動でも通過できるか？」

と問いました．これは，小石と壁穴がどちらも凸であれば正しいことがわかっています．同様の問題を4次元以上のユークリッド空間でも考えることができますが，高次元では凸の仮定をつけても通過できるとは限りません．ただし，通過できないのはどんな場合なのか，詳しいことはわかっていないようです．

ξ さんは壁穴が円や正方形の場合はどうなるのか考えてみたが，結論が得られず「大変困っている」と述べています．実はこれについては，Itoh-Tanoue-Zamfirescu によって解決しています．円形の穴の場合は次のようになります．

「一辺1の正四面体 T が通過できる円形の穴の半径の最小値は $r\approx 0.4478$ である．ただし，r は方程式 $216x^6-9x^4+38x^2-9=0$ の根である．」

T を頂点のひとつを通る平面で切ると，その切断面は三角形になります．この三角形の外接円の半径の最小値が上の r なのです．方程式が複雑でちょっとびっくりしますが，最小の外接円をもつ切断面は二等辺三角形になることに注意すると証明は難しくありません．

なお，半径 r の穴を T が通過するには，回転運動が必須で，平行移動だけでは通過できません．

一方，図1からもわかるとおり，一辺が1の正四面体 T は一辺が $1/\sqrt{2}$ の立方体に埋め込めます．したがって T は一辺が $1/\sqrt{2}$ の正方形の壁穴を壁に垂直な方向の平行移動だけで通過できます．実は，これより小さい正方形の壁穴は通過できません．証明は円形の壁穴の場合より少し面倒になります．この問題の高次元版は，アダマール予想(n が4の倍数なら，n 次の正方行列で ±1 のみを成分にもち，どの2行も直交しているものが存在するという予想)と関連があり，素数の分布が深く絡んでいるように思われます．

ところで，私も厚紙で正四面体と壁穴を作ってずいぶん遊びました．しかし，誤差の影響で厳密な模型ではあり得ないことが起きたりします．それもパズルとしては楽しいのですが，やはりより正確な模型を木とかアクリルで作って，例えば内法の一辺が6.9 cm の正三角柱の中を一辺7 cm の正四面体がすべっていくのを見てみたいものです．このような模型を私は作れる，あるいは作れるところを知っているという方はお知らせください．

［とくしげ のりひで／琉球大学教育学部］

出題 2 ●出題者 **西山 豊**

辺の長さが整数である任意の三角形において，周囲の長さと面積の値が等しいものをすべて求め，これら以外に存在しないことを証明してください．

解答 2

応募者は87名で，年齢分布は10代が5名，20代が9名，30代が10名，40代が16名，50代が30名，60代が7名，70代が8名，80代が2名でした．条件を満たす三角形は2個とするなど不正解が17名ありました．残り70名が5個と答え，そのうち30名がエレガントな解答でした．

最初に yk さんの解答を紹介します．三角形の3辺の長さ，半周長を，それぞれ a,b,c,s とすると，与えられた条件はヘロンの公式より

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c), \tag{1}$$

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=2s, \tag{2}$$

(2)の両辺を2乗し，s を消去して整理すると

$$\begin{aligned}&(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\\&\quad=16(a+b+c)\end{aligned} \tag{3}$$

となります．ここで

$$\begin{cases}x=-a+b+c\\y=a-b+c\\z=a+b-c\end{cases} \tag{4}$$

とおくと

エレガントな解答(30名)

●10代
唐津市・高木悠
東京都・川崎翔

●20代
東京都・中尾錦弘
船橋市・稲川太郎

●30代
北上市・森その子
東京都・山口拓司
半田市・水野修
小田原市・田中純一
京都市・黄瀬正敏

●40代
桑名市・山本秀平
西宮市・ぬるぽ
豊田市・白山義和
千葉市・寺西直之
東京都・升田春夫
高知市・藤岡優太

●50代
大津市・森原則男
横浜市・水谷一
横浜市・yk
加須市・小林国雄
東京都・岩倉健一
山口市・奈良岡悟
名古屋市・山本長晴
三条市・加ト
大分市・樋口恒雄
東京都・ξ

●70代
柏原市・名倉嘉尊
東京都・山本彬也
滑川市・高見次郎
小矢部市・野手明

●80代
三島市・落合博

$$\begin{cases} a = \dfrac{y+z}{2} \\ b = \dfrac{z+x}{2} \\ c = \dfrac{x+y}{2} \end{cases} \qquad (5)$$

で，(3)は x, y, z を用いて

$$xyz = 16(x+y+z) \qquad (6)$$

と書けます．a, b, c は整数でかつ三角形の長さなので，(4)より x, y, z は正の整数となり，(5)よりその偶奇は一致します．すると(6)より x, y, z のうち少なくとも1つは偶数なので，すべて偶数となります．よって，X, Y, Z を正の整数として

$$\begin{cases} x = 2X \\ y = 2Y \\ z = 2Z \end{cases} \qquad (7)$$

とおくことができて，(6)は

$$XYZ = 4(X+Y+Z) \qquad (8)$$

と書けます．ここで $X \leqq Y \leqq Z$ と仮定すると

$XYZ \leqq 4 \cdot 3Z = 12Z$　より　$XY \leqq 12$,

$X^2 \leqq XY \leqq 12$　より　$X^2 \leqq 12$,

$X \leqq 2\sqrt{3} = 3.4\cdots$　より　$X \leqq 3$,

なので X のそれぞれの場合を見ていくと，$X = 1$ のとき

$$(Y-4)(Z-4) = 20$$

なので

$$(Y, Z) = (5, 24), (6, 14), (8, 9),$$

$X = 2$ のとき

$$(Y-2)(Z-2) = 8$$

なので

$$(Y, Z) = (3, 10), (4, 6),$$

$X = 3$ のとき

$$3YZ \leqq 4 \cdot 3Z$$

なので

$$Y \leqq 4$$

となりさらに

$$\begin{cases} Y = 3 \Longrightarrow 9Z = 4(6+Z) \\ Y = 4 \Longrightarrow 12Z = 4(7+Z) \end{cases}$$

よって，$X = 3$ の解はありません．

(5), (7)より

$$\begin{cases} a = Y+Z \\ b = Z+X \\ c = X+Y \end{cases}$$

なので，求める三角形は次の5個で，最初の3つは鈍角三角形，残りの2つは直角三角形です．

$$\{a, b, c\} = \{6, 25, 29\}, \{7, 15, 20\}, \{9, 10, 17\}, \{5, 12, 13\}, \{6, 8, 10\}$$

パソコンのプログラムで解を求めるとしたものがありましたが，紙と鉛筆で解くのが原則ですのでエレガントからは除外しました．

$$XYZ = 4(X+Y+Z)$$

と導入しながら，条件を

$$XY \leqq 12$$

として

$$Z = \frac{4(X+Y)}{XY-4}$$

を解く答案もありました．また，$X = 1$ のとき

$$YZ = 4(1+Y+Z)$$

は因数分解できるところを

$$Y = \frac{4(Z+1)}{Z-4} = 4 + \frac{20}{Z-4}, \qquad (Z \geqq 5)$$

として解いている答案が多くありました．もう一歩でエレガントな解答になるものが多くあったのは残念です．

図形を用いた答案が12名ありましたが，その中より森原則男さんの解答を紹介します．図1のように△ABCの各辺の長さを a, b, c，内接円の半径を r としますと△ABCの面積は

$$\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

で表されます．題意より，これが周囲の長さ $a+b+c$ と等しいので

$$\frac{1}{2}r(a+b+c) = a+b+c \quad よって \quad r = 2$$

つまり，求める三角形は半径2の円に外接する三角形になります．

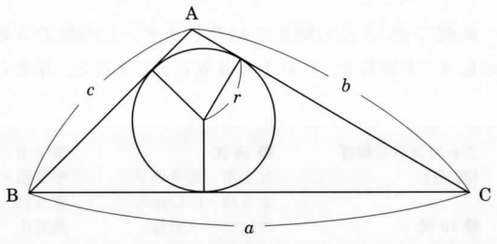

図1

求める△ABCの内接円の接点と各頂点との長さを図2のように x, y, z とします．

$$a = y+z, \qquad b = z+x, \qquad c = x+y$$

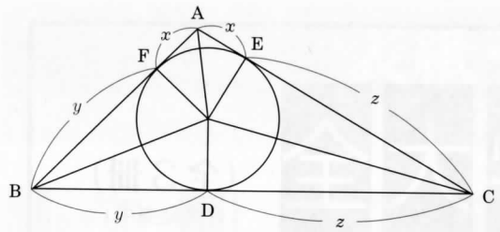

図2

ですから

$$\frac{a+b+c}{2} = \frac{(y+z)+(z+x)+(x+y)}{2} = x+y+z$$

となり，これより

$$\frac{-a+b+c}{2} = x, \qquad \frac{a-b+c}{2} = y,$$

$$\frac{a+b-c}{2} = z,$$

です．よってヘロンの公式と題意より

$$2(x+y+z) = \sqrt{(x+y+z)xyz}$$

なので

$$xyz = 4(x+y+z)$$

が導かれます($x \leqq y \leqq z$ としても一般性を失わない)．すると $60^\circ \leqq A < 180^\circ$ となり，$0 < x \leqq 2\sqrt{3}$ ですから，x の値は $x = 1, 2, 3$ に限られます．

この問題は『幾何学大辞典』第5巻(槙書店)の930番目にも紹介されていますが，オリジナルは

Mathematical questions and solutions from the "Educational Times", Vol. 5(1904), pp. 54-56, pp. 62-63.

であり，そこには2つの証明が掲載されています．100年以上前の有名な問題であり，そのときすでに証明されていることは驚きです．

今回の問題は高校数学の知識で解ける問題でした．エレガントな解答の条件として，パソコンを使わないこと，解をしらみつぶしに探索しないこと，変数や数式を多用しないこと，条件を十分に絞り込むこと，奇数と偶数のチェックをすること，因数分解できていることなどを基準にしました．工夫をすれば論理の飛躍なしに2ページ内に収まる解答ができるので，この欄にふさわしい出題であり解答であったと思います．

［にしやま ゆたか／大阪経済大学経営情報学部］