エレガントな解答をもとむ【解答】

◉出題
2010年1月号

出題 1

◉出題者
西山 豊＋森原則男

（1） 正五角形と外接円を描きます．外接円の円周上に任意の点Pを定め，点Pから出発して反時計まわりに頂点に1から5まで番号をつけます．点Pと各頂点との距離を x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 とするとき，

$$x_1+x_3+x_5=x_2+x_4$$

が成り立つことを証明してください．

（2） 一般に，奇数の頂点がある正 $2n+1$ 角形では，外接円の円周上の任意の点Pから出発して，奇数番目の頂点との距離の総和は，偶数番目の頂点との距離の総和に等しいことを示してください．

$$x_1+x_3+\cdots+x_{2n+1}=x_2+x_4+\cdots+x_{2n}$$

解答 1

解答者は10代7名，20代10名，30代12名，40代25名，50代42名，60代18名，70代4名，80代3名の計121名で，全員が正解でした．解答の内訳は，複数の解答をしていただいたものも数えて，三角関数を使ったものが92名で圧倒的に多く，つぎにトレミーの定理を使ったものが33名，余弦定理を使ったものが6名でした．その他，初等幾何学によるものが8名でした．

この問題を教えていただいたのは大津市・森原則男さんからで，私は，そのとき，美しい定理だと思いました．解き方がわからないので調べてみたら，岩田至康『幾何学大辞典』(槇書店)の第1巻と第4巻にトレミーの定理の応用として出題されていました．正三角形の場合は問題290にあり，トレミーの定理そのものです．正五角形の場合は，問題309にあり，トレミーの定理と初等幾何学による証明(本稿ではその4)が示してあります．一般の正 $2n+1$ 角形については，問題1323にあり，Chadu という名前がついていました．『幾何学大辞典』は全部で8巻ありますが，大きな図書館では閲覧できるはずです．

私は，トレミーの定理による解答が多いのではと予想していましたが，圧倒的に多いのは三角関数を駆使するものでした．解答例は，その1からその5まで，エレガントと思われる順番に並べてあります．その1は円周角だけで証明するもので，中学生でも解けます．まさに，エレガントな問題に対する，エレガントな解答であると思いました．その2はトレミーの定理で証明するもので，正 $2n+1$ 角形の場合は，トレミーの定理を適用する四角形をどのように選ぶかが証明のポイントになっているようです．その3は余弦定理で証明するもので，高校数学でトレミーの定理を習っていないという読者向けです．余弦定理を2回使えばトレミーの定理になるので，その2と同類の証明になります．その4は初等幾何学による証明で，奇数と偶数の長さをそれぞれ集めて二等辺三角形にするものです．その5は三角関数による証明で，式を簡略化するために多くの解答者は複素数を使われていました(50名)．また，ベクトルによる証明もありました(3名)．正五角形の証明はそのまま正 $2n+1$ 角形に適用できるので，出題(2)の解答を省略しています．

「牛刀をもって鶏を割く」ではないですが，三角関数や複素数を使わなくても，中学生の幾何学の知識さえあれば十分に解ける問題だと思い知らされました．

◉── その1：円周角

まず始めに，横浜市・山田正昭さんによる円周角だけを使ったエレガントな解答を紹介しよう．正五角形の頂点を $A_1, A_2, \cdots, A_5$，任意の点Pが A_5 と A_1 の間にあり，$PA_1, PA_2, \cdots, PA_5$ の距離を $x_1, x_2, \cdots, x_5$ とする(図1(1))．劣弧 $A_1A_2, \cdots, A_4A_5$ に対する円周角は等しく，

$$\angle A_1PA_2=\angle A_2PA_3=\angle A_3PA_4=\angle A_4PA_5=\frac{\pi}{5}$$

である．

ここで，線分 $PA_1, PA_2, \cdots, PA_5$ に沿って円を切り開き6つの部分に分ける．そして偶数番目の部分だけを裏返して，ふたたび同じ順番に貼り合わせる．さらに，頂点を図1(2)のように振りなおす．

$$\angle PB_1B_2=\angle B_1B_2B_3=\angle B_2B_3B_4=\angle B_3B_4B_5=\frac{\pi}{5}$$

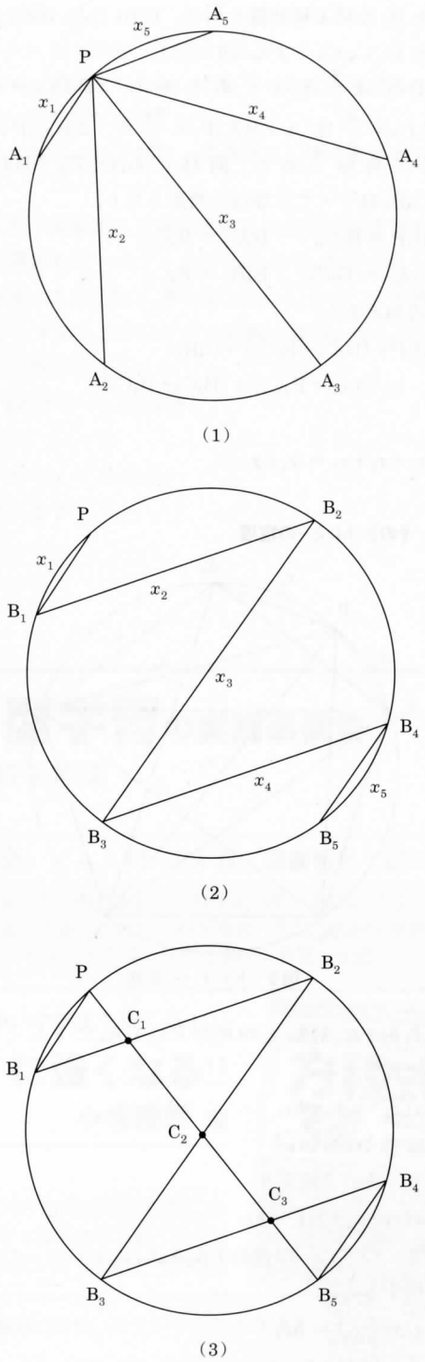

図1 円周角

● 10代
東京都・野崎雄太
宝塚市・夏原裕也
東京都・田中亮誠
行橋市・川部友大
鹿児島市・佐野文彦
札幌市・MaRo
東京都・木戸晶一郎

● 20代
横浜市・じゅんちゃん
所沢市・朝倉崇之
さいたま市・井上昌一
郡山市・五十嵐真人
東広島市・松原和樹
岡崎市・杉山紋巳
京都市・塚田大祐
横浜市・鯨井孝典
札幌市・岩瀬優也
君津市・田島唯

● 30代
東京都・武井亜紀夫
宮城県・亘 ϕ 理
上越市・武田道弘
枚方市・佐々田明彦
東京都・$\eta\rho$
半田市・水野修
長浜市・橋本和章
仙台市・西松毅
松山市・冨永昌以
神奈川県・野谷浩志
水戸市・ゆりかあやな
三沢市・小松邦嘉

● 40代
鯖江市・山本ジョージ
東かがわ市・三谷宣博
金沢市・小西昌樹
茅ヶ崎市・吉武弘明
札幌市・和田文興
京都市・内田達夫
甲府市・数野勝弘
千葉県・1M5D1
小金井市・内藤康正
町田市・鈴木智秀
舞鶴市・古川博也
桑名市・山本秀平
東京都・波田野茂男
千曲市・山岸昭善
秋田市・千葉隆
豊前市・林道宏
愛知県・梶田潤
戸田市・森忠彦
東京都・山口拓司
姫路市・野崎歩
桶川市・秋山佳子
大阪市・藤田幸久
東久留米市・浜田一志
天理市・花岡一孝
姫路市・日髙好光

● 50代
仙台市・大場利樹
東近江市・平岩治司
名古屋市・山本長晴
福井市・森茂
京都市・清洲早紀
島根県・吉田彰二
西宮市・ぬるぽ
浜松市・深川龍男
横浜市・yk
加須市・小林国雄
山口県・高橋秀明
東京都・岩倉健一
東京都・ξ
帯広市・浅田智子
伊丹市・北村嘉章
岡崎市・三浦孝之
東京都・宮村恵一
三条市・加ト
青森市・神正剛
三鷹市・石川和弘
西宮市・白澤洋行
豊橋市・西田誠
静岡市・鈴木丈喜
木更津市・五十嵐功
京都市・知魚楽
東京都・すぐる学習会
横浜市・髙橋利之
さいたま市・荻原紹夫
松戸市・広川久晴
高崎市・高橋広幸
相模原市・Toshi
つくば市・yaz
東京都・Y. K.
東京都・金澤寿男
三重県・奥田真吾
福井市・吉田明
豊田市・白山義和
東京都・升田春夫
埼玉県・斎藤比呂志
滝川市・安田富久一
横浜市・山田正昭
横浜市・橘透

● 60代
富山県・無明子
松山市・桑村伯夫
水戸市・会沢力
静岡市・松永康正
日立市・高橋健吾
北九州市・田中信輝
横浜市・水谷一
松本市・高村薫
市川市・K. Tezuka
奈良県・野崎伸治
草津市・中川榮一郎
市川市・すみれ草
松江市・下房俊一
青森県・高坂剛
西宮市・松岡孝男
徳島市・古川民夫
日立市・木村奎二
東京都・川島真人

● 70代
東京都・山本彬也
飯田市・小林博省
柏原市・名倉嘉尊
仙台市・髙木富士夫

● 80代
長岡京市・クスコ
豊中市・瀬川秀雄
三島市・落合博

P と B_5 を結ぶ補助線を引き，B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 との交点を C_1, C_2, C_3 とする(図 1(3))．

弧 B_1B_5 は $\frac{2}{5}$ 円周であるから $\angle B_1PC_1 = \frac{2\pi}{5}$，$\angle PB_1C_1 = \frac{\pi}{5}$ より $\angle B_1C_1P = \frac{2\pi}{5}$ で，$\triangle B_1C_1P$ は二等辺三角形である．同様に $\triangle B_2C_1C_2, \triangle B_3C_3C_2, \triangle B_4C_3B_5$ はすべて二等辺三角形となり，

$$B_1P = B_1C_1, \quad B_2C_2 = B_2C_1,$$
$$B_3C_2 = B_3C_3, \quad B_4B_5 = B_4C_3.$$

各辺加えると，

$$B_1P + (B_2C_2 + B_3C_2) + B_4B_5$$
$$= (B_1C_1 + B_2C_1) + (B_3C_3 + B_4C_3)$$

より

$$x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4.$$

◉── その2：トレミーの定理

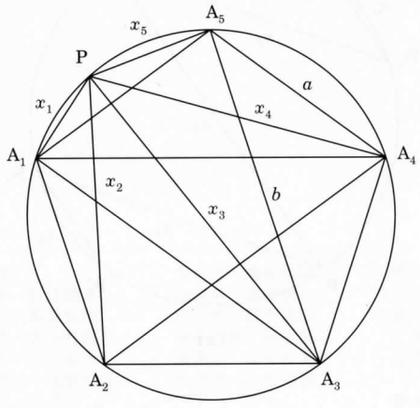

図 2　トレミーの定理

四角形 $PA_3A_4A_5$ と四角形 $PA_1A_3A_4$ にトレミーの定理を適用すると，

$$a(x_3 + x_5) = bx_4,$$
$$ax_1 + bx_4 = bx_3$$

となる．上の 2 式より

$$a(x_1 + x_3 + x_5) = bx_3$$

を得る．つぎに，四角形 $PA_2A_3A_4$ にトレミーの定理を適用すると

$$a(x_2 + x_4) = bx_3$$

となる．以上より，

$$x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4$$

となる．

正 $2n+1$ 角形の場合は，つぎのように考える．頂点を $A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}$ とし，任意の点 P が A_{2n+1} と A_1 の間にあるとする．$PA_1A_2A_3, PA_3A_4A_5, \cdots$ というように，隣接する 3 つの頂点 $\{A_i, A_{i+1}, A_{i+2}\}$ と点 P で四角形を作っていくと，巡回する $2n+1$ 個の四角形ができる．それぞれにトレミーの定理を適用すると，つぎのようになる．

$$\begin{cases} a(x_1 + x_3) = bx_2 \\ a(x_3 + x_5) = bx_4 \\ \quad\vdots \\ a(x_{2n-1} + x_{2n+1}) = bx_{2n} \\ ax_{2n+1} + bx_1 = ax_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} bx_3 = a(x_2 + x_4) \\ bx_5 = a(x_4 + x_6) \\ \quad\vdots \\ bx_{2n-1} = a(x_{2n-2} + x_{2n}) \\ bx_{2n+1} + ax_1 = ax_{2n} \end{cases}$$

左右両辺をそれぞれ合計すると

$$(2a+b)(x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{2n+1})$$
$$= (2a+b)(x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n})$$

となり，$2a+b$ で両辺を割れば，

$$x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{2n+1} = x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n}$$

となる．

◉── その3：余弦定理

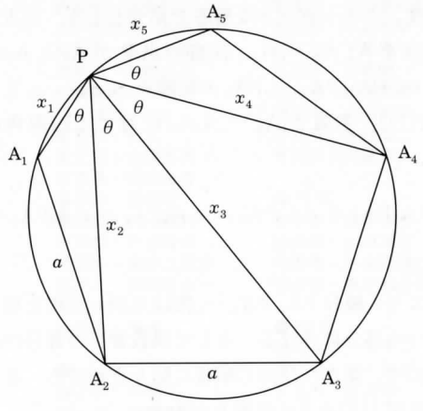

図 3　余弦定理

1 辺の長さを a，円周角を θ とする．$\triangle PA_1A_2$ と $\triangle PA_2A_3$ の余弦定理より，

$$a^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos\theta,$$
$$a^2 = x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3\cos\theta.$$

上式で a を消去すると，

$$x_1 + x_3 = 2x_2\cos\theta$$

となる．同様にして，隣接する 2 つの三角形に余弦定理を適用すると，合計 5 つの式が得られる．

$$x_1 + x_3 = 2x_2\cos\theta$$
$$x_2 + x_4 = 2x_3\cos\theta$$
$$x_3 + x_5 = 2x_4\cos\theta$$
$$x_4 - x_1 = 2x_5\cos\theta$$
$$x_5 - x_2 = -2x_1\cos\theta$$

奇数と偶数に関する項を左右に分け，合計すると，

$$(2 + 2\cos\theta)(x_1 + x_2 + x_3) = (2 + 2\cos\theta)(x_2 + x_4)$$

なので

$$x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4$$

となる．ここで，余弦定理とトレミーの定理の関係については，

$$b = 2a\cos\theta$$

の式で，両者がつながっていることに注意すること．

この解答には三島市・落合博さん等 6 名がありました．

また，姫路市・日髙好光さんは余弦定理を使わないで証明されています．$\triangle PA_1A_2$ を A_2 を中心にして回転させ，A_1 が A_3 に重なるようにします．P の移動先を B とすると P, A_3, B が一直線に並び，$\triangle A_2BP$ は二等辺三角形になります．

$$BP = 2 \times A_2P\cos\theta$$

より，

$$x_3 + x_1 = 2x_2\cos\theta$$

となります．

◉── その4：二等辺三角形

一辺 A_1A_2 上の円周角を α とすると，$5\alpha=\pi$ である．PA_1 を延長して $A_1B=PA_5$ となるように B をとれば，2 辺夾角等しいから $\triangle PA_5A_3\equiv\triangle BA_1A_3$ であり，

$$\angle B=\angle A_5PA_3=2\alpha=\angle A_1PA_3$$

より $A_3P=A_3B$ となる．

同様にして，PA_2 を延長して $A_2C=PA_4$ となるように C をとれば，$\triangle PA_3A_4\equiv\triangle CA_3A_2$ であり，

$$\angle A_4PA_3=\angle A_2CA_3=\alpha$$

より，$A_3P=A_3C$ となる．

つぎに PA_3 を延長して $A_3D=PB$ となるように D をとれば

$$\angle CA_3D=2\alpha=\angle A_3PB,$$
$$A_3B=A_3C$$

であるから，$\triangle PA_3B\equiv\triangle A_3CD$.

$\angle D=\angle CA_3D=2\alpha$ によって $\angle A_3CD=\alpha$ である．また，$\angle PCD=2\alpha=\angle PDC$ より，$PC=PD$ である．

ところが $PC=PA_2+PA_4$ および

$$PD=PA_3+A_3D=PA_3+PB=PA_3+PA_1+PA_5$$

により

$$PA_1+PA_3+PA_5=PA_2+PA_4.$$

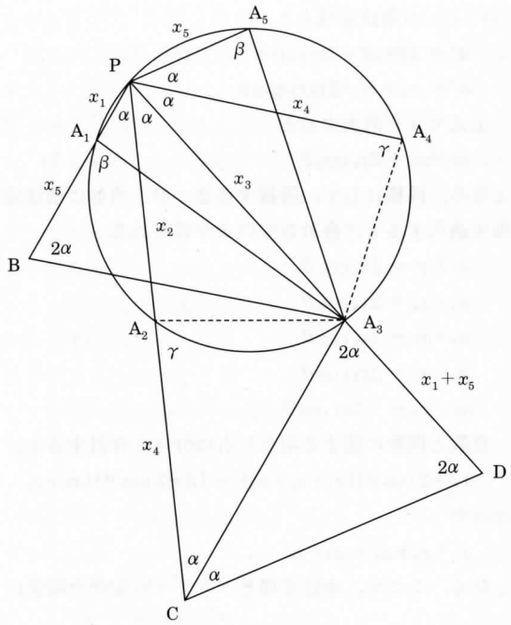

図4　二等辺三角形

このような方法では浜松市・深川龍男さん，東京都・木戸晶一郎さん，東京都・波田野茂男さん等の解答がありました．

◉── その5：三角関数

外接円を原点 O の単位円とし，正 $2n+1$ 角形の頂点を $A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}$ とし，任意の点 P が A_{2n+1} と A_1 の間にあるものとする．

$$\angle POA_1=2\theta,$$
$$\angle A_1OA_2=2\alpha \qquad \left(\alpha=\frac{\pi}{2n+1}\right)$$

とすると，

$$x_k=2\sin\{\theta+(k-1)\alpha\} \qquad (k=1,2,\cdots,2n+1)$$

となることから

$$\begin{aligned}&x_1+x_3+\cdots+x_{2n+1}-(x_2+x_4+\cdots+x_{2n})\\&=x_1-x_2+x_3-x_4+\cdots-x_{2n}+x_{2n+1}\\&=2\{\sin\theta-\sin(\theta+\alpha)+\sin(\theta+2\alpha)-\sin(\theta+3\alpha)\\&\qquad+\cdots-\sin(\theta+(2n-1)\alpha)+\sin(\theta+2n\alpha)\}\end{aligned}$$

が成り立つ．$i=\sqrt{-1}$（虚数単位）として，

$$\begin{aligned}E&=e^{i\theta}-e^{i(\theta+\alpha)}+e^{i(\theta+2\alpha)}-e^{i(\theta+3\alpha)}\\&\qquad+\cdots-e^{i(\theta+(2n-1)\alpha)}+e^{i(\theta+2n\alpha)}\end{aligned}$$

とおくと上式の｛ ｝の中は，$\mathrm{Im}\,E$（$\mathrm{Im}\,E$ は E の虚数）となる．ここで，

$$\begin{aligned}E&=e^{i\theta}\{1-e^{\alpha i}+e^{2\alpha i}-e^{3\alpha i}+\cdots-e^{(2n-1)\alpha i}+e^{2n\alpha i}\}\\&=e^{i\theta}\cdot\frac{1+e^{(2n+1)\alpha i}}{1+e^{\alpha i}}\\&\qquad\left(\alpha=\frac{\pi}{2n+1},\ 1+e^{\alpha i}\neq 0\text{ より}\right)\\&=e^{i\theta}\cdot\frac{1+e^{\pi i}}{1+e^{\alpha i}}\\&=0 \qquad (\because e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1)\end{aligned}$$

よって，

$$x_1+x_3+\cdots+x_{2n+1}=x_2+x_4+\cdots+x_{2n}.$$

［にしやま ゆたか／大阪経済大学経営情報学部］
［もりはら のりお／滋賀県立瀬田工業高等学校］

出題 2

◉出題者
安田 亨

八面体 PABCDQ がある．この八面体は，三角形 PAB, PBC, PCD, PDA, QAB, QBC, QCD, QDA を面とし，さらに，

$$PA=PB=PC=PD$$
$$=QA=QB=QC=QD=\sqrt{a^2+b^2},$$
$$AB=CD=2a,\qquad BD=2b$$

である（a, b は正の定数）．

（1）　このような立体ができるために a, b の満たす必要十分条件を求めよ．

（2）　八面体 PABCDQ の体積 V の最大値を求めよ．

解答 2

応募総数 51 名，年齢別の構成は 10 代 1 名，20 代 5 名，30 代 6 名，40 代 9 名，50 代 18 名，60 代 8 名，70 代 2 名，80 代 2 名です．誤答は 7 名，(1)のみの正解は 10 名，(2)のみの正解は 2 名，(1)(2)の両方の正解は 32 名でした．

大学入試で，私が「三脚問題」と呼んでいるタイプの問題があります．カメラの三脚の足 PA, PB, PC の長さが等しいとき，足の先端 A, B, C で作る平面に P からおろした垂線の足 H は三角形 ABC の外心になっているという事実です．図 1 で HA, HB, HC はすべて $\sqrt{c^2-h^2}$ になるためです．足の長さが同じで「足の先がすべて同一平面上にあるならば」足が何本になっても同じです．本問はその状態です．八面体は飾りで，半分の「四角錐 PABCD が三脚状態」というのが本質です．

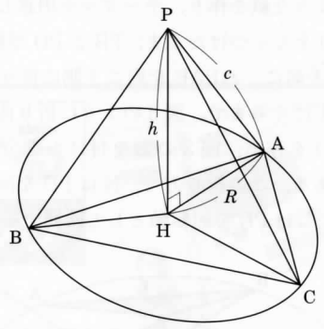

図 1

◉── 解1（(1)のみ）

$c=\sqrt{a^2+b^2}$ とする．

$$PA=PB=PC=PD=c,$$
$$QA=QB=QC=QD=c$$

●全問正解
東京都・野崎雄太
所沢市・朝倉崇之
さいたま市・井上昌一
枚方市・佐々田明彦
小金井市・田中昌樹
半田市・水野修
松山市・冨永昌以
鯖江市・山本ジョージ
札幌市・和田文興
姫路市・日髙好光
東京都・波田野茂男
東京都・山口拓司
東久留米市・浜田一志
京都市・清洲早紀
浅口市・横山俊則
横浜市・yk
加須市・小林国雄
東京都・岩倉健一
東京都・ξ
山口県・高橋秀明
岡崎市・三浦孝之
三条市・加ト
横浜市・髙橋利之
さいたま市・荻原紹夫
つくば市・yaz
東京都・Y. K.
横浜市・水谷一
市川市・K. Tezuka
奈良県・野崎伸治
東京都・川島真人
柏原市・名倉嘉尊
長岡京市・クスコ

●(1)のみ正解
横浜市・じゅんちゃん
東京都・黒川瞬
三沢市・小松邦嘉
各務原市・横山高秀
豊田市・白山義和
横浜市・山田正昭
日立市・高橋健吾
西宮市・松岡孝男
東京都・山本彬也
三島市・落合博

●(2)のみ正解
千曲市・山岸昭善
姫路市・野崎歩