エレガントな解答をもとむ【解答】

◉出題
2010年10月号

出題 1

◉出題者
西山 豊

（1） 表と裏が均等に現れる硬貨があります．表を1，裏を0として，硬貨を連続して投げたとき，111が現れるまでの平均待ち時間と，011が現れるまでの平均待ち時間を求めてください．1001110110…と続く場合は111の待ち時間は6，011の待ち時間は5となります．

（2） 平均待ち時間が簡単に計算できるアルゴリズムを考え，101101が現れる平均待ち時間を求めてください．

解答 1

解答者は10代1名，20代6名，30代2名，40代15名，50代17名，60代7名，70代1名の計49名でした．答えは，(1)111, 011の平均待ち時間は14, 8であり，(2)101101の平均待ち時間は74です．(1)のみ正解が10名，(1)(2)ともに正解が24名でした．(2)がメインの出題でしたので全問正解のみを正解者としました．

24名のうち19名が場合わけによる連立一次方程式による方法，5名がオーバーラップによる方法でした．エレガントな解答として期待していたのはオーバーラップによる方法であり，コンウェイの先導数(leading number)とも呼ばれていますが，意外とこれを知っている解答者が少なかったように思います．

◉── 解法1　連立方程式による方法

まず，名古屋市・廣田正史さんの連立方程式による方法を説明します．111が現われるまでの平均待ち時間を$x=E(111)$とします．場合わけをするために，1/2の確率で1と0が現われ，そのまた1/2の確率で1と0が現れるという樹形図を想定しておきます．具体的には図1が描ければxに関する方程式が立てられます．

最初に1/2の確率で1と0が現われますが，0が出

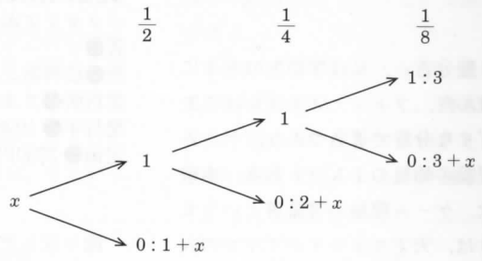

図1　111の平均待ち時間

●解法1
東京都・藤山俊文
東京都・黒川瞬
小金井市・田中昌樹
東京都・六ちゃん
秋田市・千葉隆
豊前市・林道宏
東京都・高雄保嘉
京都市・清洲早紀
赤穂市・政家一穂
名古屋市・山本長晴
名古屋市・廣田正史
横浜市・山田正昭
川崎市・河原崎純一
東村山市・木村眞一郎
横浜市・高橋利之
市川市・K. Tezuka
東京都・渡邊芳行
横浜市・水谷一
東京都・山本彬也

●解法2
所沢市・朝倉崇之
加須市・小林国雄
東京都・ξ
札幌市・安藤和夫
松本市・高村薫

た場合はxにリセットされ，かつ待ち時間が1増えて$1+x$になります．1がでた後0が出た場合はこれもxにリセットされ，かつ待ち時間が2増えて$2+x$になります(このときは確率1/4です)．1が連続して3回出れば，確率1/8で待ち時間が3で111が現れたことになります．1と1が出て0が出た場合はxにリセットされ，かつ待ち時間が3増えて$3+x$になります．

以上の関係を式に表すと，

$$x=\frac{1}{2}(1+x)+\frac{1}{4}(2+x)+\frac{1}{8}(3+x)+\frac{1}{8}\times 3$$

になります．これを解いて$x=14$，つまり，111の平均待ち時間は14となります．

同じようにして，011が現れるまでの平均待ち時間$x=E(011)$を求めてみましょう．

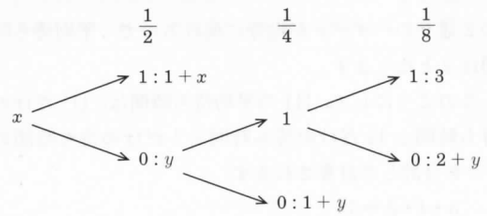

図2　011の平均待ち時間

図2よりx, yの連立方程式となります．

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(1+x)+\frac{1}{2}y \\ y=\frac{1}{2}(1+y)+\frac{1}{4}(2+y)+\frac{1}{4}\times 3 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて$x=8$，$y=7$，つまり，011の平均待ち時間は8となります．

101101の平均待ち時間も，$x=E(101101)$としてx, y, zの連立方程式を立てることができます．

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}(1+x) \\ y=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}(1+y) \\ z=\frac{1}{2}(3+x)+\frac{1}{4}(2+z)+\frac{1}{8}(4+y) \\ \qquad +\frac{1}{16}(6+x)+\frac{1}{16}\times 6 \end{cases}$$

そして，この連立方程式を解いて$x=74$，$y=73$，$z=72$，よって，101101の平均待ち時間は74となりますが，図が複雑になること，変数の数が増えること，一般性を考えると，アルゴリズムとしては良い方法ではありません．

◉── 解法2　オーバーラップによる方法

そこで，2つ目の解法である，オーバーラップによる方法を説明しましょう．このような解答が加須市・小林国雄さんをはじめ5名いました．パターンA-111, B-011, C-101101が現れるまでの平均待ち時間を説明します．

ジョン・コンウェイ(1937-)はパターンとパターンが重なる指標として先導数(leading number)というものを導入しました．ここではコンウェイ数と呼ぶことにして，Aに対するAの(A自身の)コンウェイ数を求めてみましょう．A-111の上にA-111を置きます．そして上段の111が下段と同一であれば1を，違えば0を上段の111の先頭の1の上に記入します．

```
    1
A - 1 1 1
A - 1 1 1
```

つぎに，上段の111から先頭の1をはずして11とし(A′)，それを下段に前詰めで重ねます．そして，11を下段の先頭から2文字と比較して，これが同一であれば1を，違えば0を上段の11の先頭の1の上に記入します．

```
    1           1
A′ - 1 1       A″ - 1
A - 1 1 1      A - 1 1 1
```

上段の文字が最後になるまで，この作業を繰り返し，それらをまとめて書くと次のようになります．

```
        1 1 1 = 7
A - 1 1 1
A - 1 1 1
```

このようにして求めた2進数111はパターンA-111に対するA-111の重なりを示す指標で，コンウェイ数AA＝111と記述します．パターンB-011に対するコンウェイ数はBB＝100，パターンC-101101に対する

コンウェイ数はCC＝100101となります．

1 0 0 ＝ 4	1 0 0 1 0 1 ＝ 37
B - 0 1 1	C - 1 0 1 1 0 1
B - 0 1 1	C - 1 0 1 1 0 1

一般に，自然数の集合 $\{1, 2, \cdots, k\}$ を要素とするとき，与えられたパターンが現れる平均待ち時間は，コンウェイ数を k 倍したものになります．(k×AA)．つまり，コンウェイ数を2進数から10進数に変換し，これに2を掛けることで求まります．よって，

A-111の場合は，2×111＝2×7＝14

B-111の場合は，2×100＝2×4＝8

C-101101の場合は，2×100101＝2×37＝74

となります．このようなアルゴリズムを知っておくと，どのようなパターンでも簡単に平均待ち時間を計算することができます．

私はペニーのゲーム(Penney's game)を調べていたとき，このアルゴリズムを知りました([1]，[2])．あまりにも素晴らしいアルゴリズムであるにもかかわらず，コンウェイはその証明を発表していません．どうして，コンウェイ数を2倍すると平均待ち時間になるかの理由を知りたくて出題したわけですが，解答者はこの公式に当てはめて計算しただけでした．そこで，この意味を考えてみましょう．

111も011も同じ確率1/8で起こるから平均待ち時間はその逆数の8と即答したいところですが，実際に計算してみるとそうでないことがわかります．111と011を比べてみて，自分自身の重複度が多いと，それだけ平均待ち時間が長くなっています．

B-011のオーバーラップを考えてみます．

011は011の先頭3文字と一致します．

＊11は011の先頭2文字と一致しません．

＊＊1は011の先頭1文字と一致しません．

B-011の中には，011以外に一致するパターンが何もないということです．要素が $\{0, 1\}$ で3ビットのパターンは次の8通りです．

000，001，010，011，100，101，110，111

これらが均等に現れるとすると011が現れる確率は1/8であり，平均待ち時間はその逆数の8となります．

一方，A-111のオーバーラップを考えてみます．

111は111の先頭3文字と一致します．

＊11は111の先頭2文字と一致します．

＊＊1は111の先頭1文字と一致します．

A-111の中には，111だけでなく11と1が含まれています．111だけの平均待ち時間を考えるなら，011と同じように

000，001，010，011，100，101，110，111

の8通りのパターンが均等に現れるので，平均待ち時間は8となります．ところが，111の中には11と1が含まれているというのです．

11だけの平均待ち時間は

00，01，10，11

の4通りのパターンが均等に現れるので，平均待ち時間は4となります．さらに，1だけの平均待ち時間は

0，1

の2通りのパターンが均等に現れるので，平均待ち時間は2となります．

このようにして，111の平均待ち時間は，111だけの待ち時間と11だけの待ち時間と1だけの待ち時間の3つを合計して計算されます．

8+4+2＝14

上の式を2でくくると，

2×(4+2+1)＝2×7

となります．( )の中はオーバーラップ度を示すコンウェイ数となっています．つまり，コンウェイ数×2が平均待ち時間となります．

どんなに長いパターンであっても，オーバーラップ度を考えることによって平均待ち時間を簡単に求めることができます．近年は安易にパソコンに頼る風潮がありますが，コンウェイの考えた素晴らしいアルゴリズム(算法)を知って，数学はやはり紙と鉛筆の世界であることを思い知らされました．

参考文献

[1] 西山豊「確率のパラドックス」『理系への数学』2010年3月号，pp. 4-8.

[2] Martine Gardner, "*Mathematical Games*", Scientific American, October 1974, 231 (4), pp. 120-125.

[にしやま ゆたか／大阪経済大学経営情報学部]

出題 2

◉出題者
秋山 仁

すべての面が正多角形で凸多面体のものは，プラトン多面体(5種類)，アルキメデス多面体(13種類)，アルキメデス角柱，アルキメデス反角柱，そしてジョンソン・ザルガラー多面体(92種類，この多面体を，本稿ではJZ-多面体と記す)，に分類されます．JZ-多面体にはJ1からJ92までの番号がつけられています．ホームページに掲載されていますので，ご参照ください．

http://mathworld.wolfram.com/JohnsonSolid.html

多面体を辺に沿って切り開き，平面状になった図形を展開図と呼ぶことにします．このとき「ある多面体が性質"TP"を持つ」とは，その多面体の展開図のうち，少なくとも一つがタイル張りできる，ときをいいます．例えば，プラトン多面体では，正十二面体以外の多面体が性質"TP"を持っています．また，アルキメデス多面体には"TP"を持つものはひとつもなく，JZ-多面体では例えばJ1，J12〜J17などが性質"TP"を持っています．

では，JZ-多面体J1〜J92のうち，上記のもの以外で，性質"TP"を持つ多面体を4種類以上示してください．また，それらの多面体の各々がタイル張りをする様子も図示してください．

解答 2

以下の17個のJZ-多面体が性質TPをもつことが分かっています．各多面体の展開図のタイル張りの様子を図示します(図1，100，101ページ)．展開図の中で，辺の記号 $a, b, c, \cdots$ は，展開図を折って立体にしたとき同一記号の辺は同じ辺になります．

◉── 解説と講評

以後，本稿ではJZ-多面体を単に"多面体"と書きます．性質TPをもつ多面体のどの面も正3角形，正方形，または正6角形のいずれかであることが容易に示せます．このことを考慮して，次の定義をします．多面体 P が (a, b, c)-多面体であるとは，P が a 個の正3角形，b 個の正方形，c 個の正6角形の面から構成されていることとします．また，タイル張り T が (A, B, C)-タイル張りであるとは，タイル張り T を構成する，正3角形，正方形，正6角形のタイルの個数の割合が $A : B : C$ であることとします．

性質TPをもつ多面体を探すには，92通りの多面体の各々に対し，それらの展開図をすべて考え，ひとつずつ充填性をチェックすれば理論上は正しいのですが，展開図の個数が膨大なので苦労します．そこで，次の方針で，あたりをつけるのが良いでしょう．

各 (a, b, c)-多面体に対し，$a : b : c = A : B : C$ をみたす各 (A, B, C)-タイル張りを基に，その一部の連結多角形領域(この領域は a 個の単位正3角形，b 個の単位正方形，c 個の単位正6角形に分割できる．以下，これを (a, b, c)-基本領域と呼ぶ)を探し出す．その各々に対し，それと合同な形の紙を用いて，多面体を作ることができるかをチェックする．

この方法で基本になるのは，プラトンやアルキメデスのタイル張りです．プラトンのタイル張りは全部で3種類，アルキメデスのタイル張りは8種類あります．

解答者
● 20代
東京都・野崎雄太
所沢市・朝倉崇之
● 30代
福井県・小松邦嘉
● 40代
静岡市・青木孝子
姫路市・日高好光
豊前市・林道宏
東京都・波田野茂男
● 50代
東京都・ξ
東京都・Y. K.
名古屋市・廣田正史
横浜市・髙橋利之
三重県・奥田真吾
● 60代
横浜市・水谷一