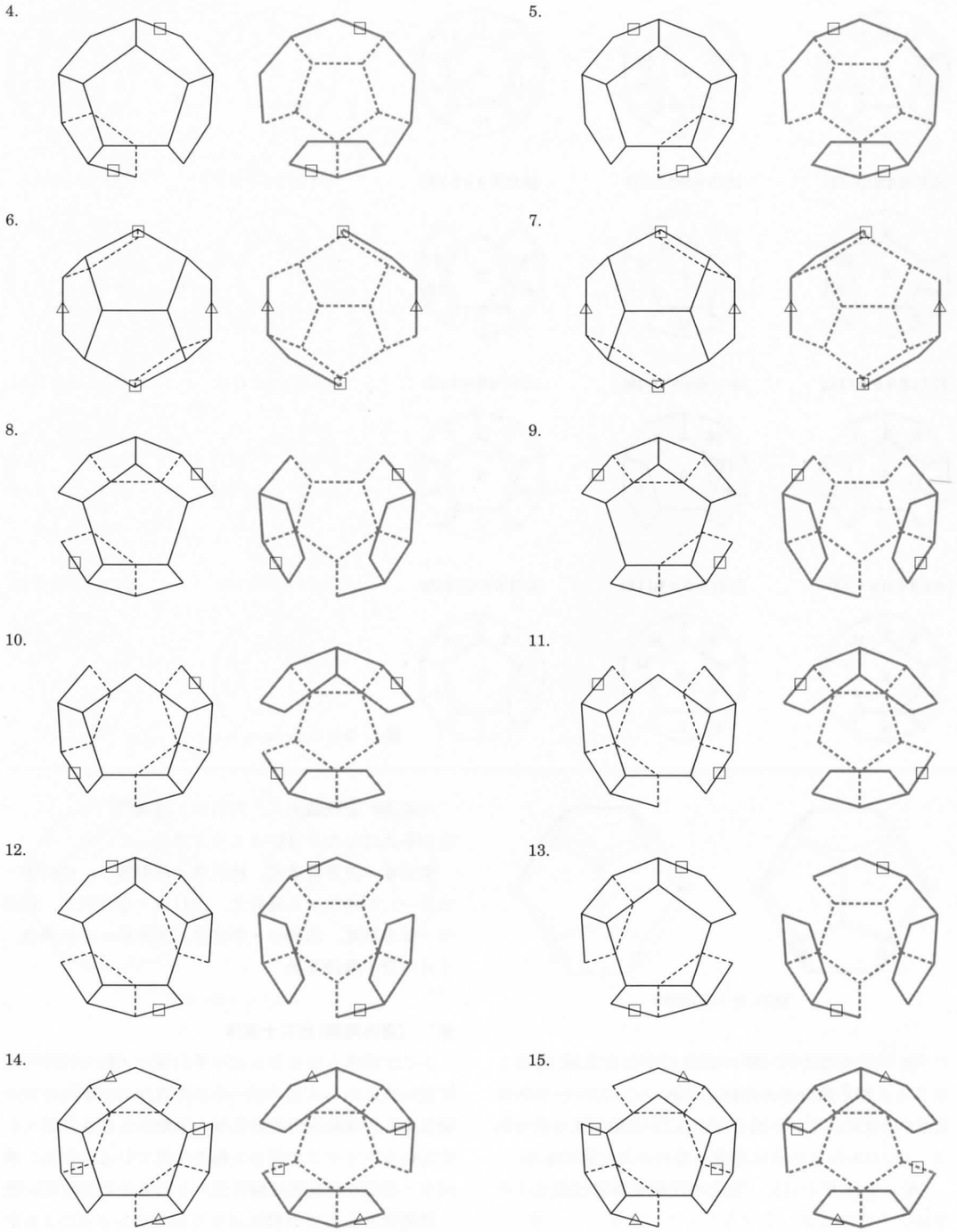



図8　塗り分け方4〜15

［いわい あきら］



## 出題 2

◉出題者
**西山 豊**

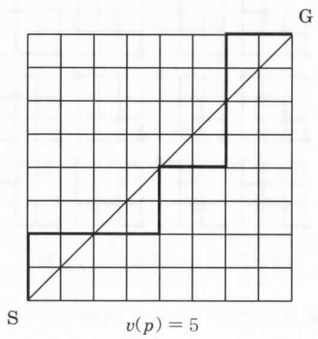
縦と横が $n\times n$ のマス目があります．左下隅の開始点(S)から右上隅の終了点(G)までの最短経路 $p\in P$ を考えるとき，この経路 $p$ が対角線に出会う回数を $v(p)$ とします．ただし，開始点と終了点も対角線上にあるとして回数に含めます．図では，対角線に5回出会っていることになります．SからGへのすべての最短経路 $P$ について考えるとき，対角線に出会う総回数を $V(n)$ とすると，

$$V(n)=4^n$$

の関係式が成り立つことが知られています．たとえば，

$$V(2)=16,\ V(3)=64,\ V(4)=256$$

です．このことをなるべく高校生程度の知識で証明できないものでしょうか．




$v(p)=5$

## 解答 2

解答者は10代2名，20代5名，30代6名，40代8名，50代20名，60代13名，70代1名，80代1名の計56名で，正解者は36名でした．証明方法の内訳は重複解答を含めると，カタラン数によるものが圧倒的に多くて34名，母関数によるものが13名，二項定理による証明が7名，その他が1名でした．「高校生程度の知識で」と書きましたので，母関数による証明や高校生にとって難解な証明は不正解としました．私が出題時に知っていた証明は母関数によるものです[1]．

読者の解答を拝見しながら，カタラン数は果たして高校生の範囲内だろうかと悩みました．その中で，素晴らしい証明を見つけることができたのは幸運でした．静岡市・鈴木丈喜さんのエレガントな解答を紹介します．

### ◉―1　通過方法に着目する証明

縦と横が $n\times n$ のマス目において，対角線上には $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_n$ の $n+1$ 個の点がある．この対角線上での《通過方法》に着目すればよい．

（1）　$P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ の各点については
　① 下から上に直進する
　② 左から右に直進する
　③ 左から上に左折する
　④ 下から右に右折する

以上4通りの経路が選択可能である(図1)．

（2）　$P_0$ と $P_n$ の各点については，端点としての制限から2通りしか経路の選択はない．

(1), (2)から $P_0, P_1, \cdots, P_n$ の順に積の法則が成り立ち，

●10代
京田辺市・竹内大智

●20代
東京都・野崎雄太
町田市・将衛門

●30代
小金井市・田中昌樹
東広島市・松原和樹
十日町市・難波弘晃
松山市・冨永昌以
所沢市・朝倉崇之

●40代
鯖江市・山本ジョージ
東京都・9浪判官
秋田市・千葉隆
東京都・波田野茂男

●50代
静岡市・鈴木丈喜
仙台市・金沢俊郎
京都市・清洲早紀
福井市・森茂
加須市・小林国雄
名古屋市・山本長晴
東京都・升田春夫
山口市・奈良岡悟
さいたま市・河村直彦
観音寺市・香川小三元
東京都・宮村恵一
亀岡市・森修啓
横浜市・髙橋利之
さいたま市・荻原紹夫
千曲市・山岸昭善
三重県・奥田真吾

●60代
志木市・細野源蔵
東京都・ξ
三条市・加ト
横浜市・水谷一
東京都・渡邊芳行
徳島市・古川民夫
市川市・K. Tezuka

●80代
甲府市・庚午

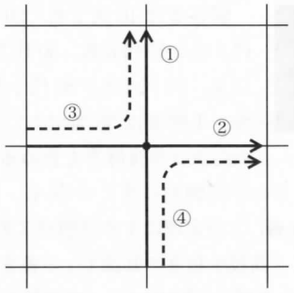



図1　4通りの通過方法

$$\begin{aligned} V(n) &= 2\times4\times4\times\cdots\times4\times2 \\ &= (2\times2)\times4\times4\times\cdots\times4 \\ &= 4\times4^{n-1} \end{aligned}$$

以上より $V(n)=4^n$ が示される．□

私は，この証明に驚くと同時に感動しました．こんなに簡単に証明できるのだろうかと．また積の法則が成り立つのだろうかとも考えました．この簡潔な証明は「分かる生徒には分かる」証明でしょうが，普通の高校生にも理解できるように，もうすこし説明を補足しておきます．

$n=3$ の場合は，最短経路は $\binom{6}{3}=20$ 通りあり，対角線上で出会うのは $4^3=64$ 回ありますが，これを通過方法に従って分類すると

$$2\times4\times4\times2$$

となります．点 $P_0$ からは左方向と上方向の2通りの出方があり，全20通りの経路は出方によって2分類されます．これらの経路は対角線に関して対称になっているので容易に理解できるでしょう(図2-1)．

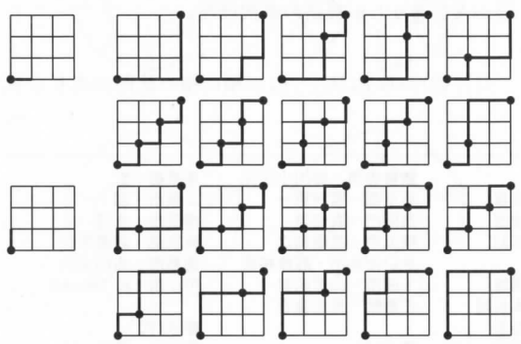


図2-1　点 $P_0$ から出る経路(2分類)

つぎに点 $P_1$ の通過方法は，下から上に直進，左から右に直進，左から上に左折，下から右に右折の4通りがあり，全20通りの経路のうち12通りは，この方法で4分類されます．$P_1$ を通過しない経路が8通りありますが，これらは，4分類のどれかに振り分けることができます(図2-2)．ただし，これには証明が必要です．

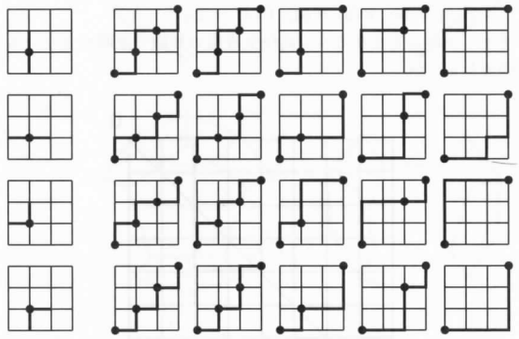


図2-2　点 $P_1$ の通過方法(4分類)

点 $P_2$ の通過方法は，点 $P_1$ と同様に下から上に直進，左から右に直進，左から上に左折，下から右に右折の4通りがあり，全20通りの経路は4分類されます(図2-3)．

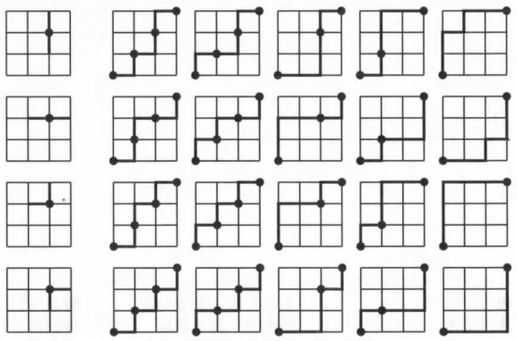


図2-3　点 $P_2$ の通過方法(4分類)

最終点 $P_3$ へは下からと左からの2通りの入り方があります．全20通りの経路は2分類されます(図2-4)．

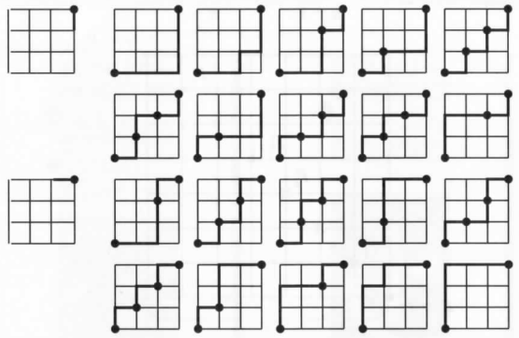


図2-4　点 $P_3=P_n$ への到達経路(2分類)

このようにして，対角線の各点の通過方法は互いに独立しているため，積の法則が成り立ち，

$$V(3)=2\times4\times4\times2=4^3=64$$

となります．

点Sと点Gでの2分類は明らかですが，それ以外の4分類は対角線の点を通過しない経路も振り分けねばならず，その規則も明記しておかねばならないので，厳密な証明が必要です．そこで，別の角度から，数学的帰納法による証明を試みてみましょう(図3)．

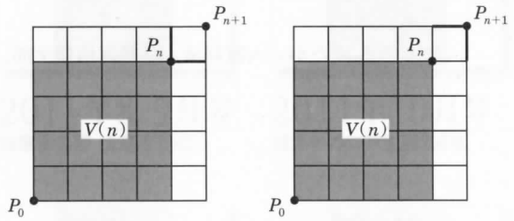



図3　数学的帰納法

$(n+1)\times(n+1)$ のマス目において，対角線上の点を $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_n, P_{n+1}$ とし，$P_0$ から $P_n$ までの最短経路が対角線に出会う回数を $V(n)$ とします．$n\times n$ のマス目と $(n+1)\times(n+1)$ のマス目の関係に注目します．点 $P_n$ からの出方は右方向と上方向の2通りがあるので経路は2倍となります(図3左)．一方，$P_{n+1}$ への経路は $P_n$ を通過しない経路もありますが，$P_{n+1}$ への入り方は下からと左からの2通りがあるので経路は2倍となります(図3右)．$P_n$ に関する経路の2倍と，$P_{n+1}$ に関する経路の2倍はそれぞれ独立しているので積の法則が成り立ち，

$$V(n+1)=V(n)\times2\times2=4V(n)$$

となります．図4は $V(2)$ と $V(3)$ の関係を示したものです．

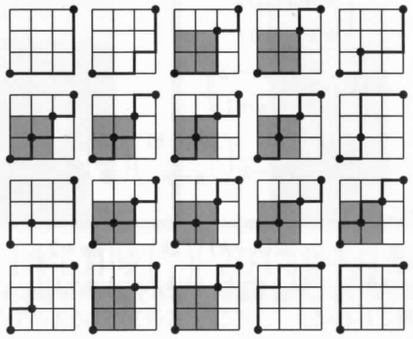


図4　$n=2$ と $n=3$ の関係

### 2　カタラン数による証明

カタラン数を使った証明は次の通りです．

$n\times n$ のマス目を $xy$ 座標で考え，$S(0,0)$, $G(n,n)$ とする．対角線上にある点 $P_k(k,k)$ $(0\leqq k\leqq n)$ を通る最短経路の本数は

$$V(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} \qquad (1)$$

であるから，$V(n)=4^n$ であることを数学的帰納法で示す．

$n=1$ のとき，$V(1)=4$ は明らか．

$$V(n)=4^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} \qquad (2)$$

が成り立つと仮定する．

$$V(n+1)=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{2k}{k}\binom{2(n+1-k)}{n+1-k}. \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} &\binom{2(n+1-k)}{n+1-k} \\ &= \frac{(2n+2-2k)!}{(n+1-k)!(n+1-k)!} \\ &= \frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!}\cdot\frac{(2n+1-2k)(2n+2-2k)}{(n+1-k)(n+1-k)} \\ &= \binom{2(n-k)}{n-k}\left(2-\frac{1}{n+1-k}\right)\cdot2 \end{aligned}$$

となるから，(3)より

$$
\begin{aligned}
&V(n+1)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}\cdot\left(2-\frac{1}{n+1-k}\right)\cdot 2\\
&\quad+\binom{2n+2}{n+1}\binom{0}{0}\\
&=4V(n)+\binom{2n+2}{n+1}\\
&\quad-2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1-k}\binom{2(n-k)}{n-k}\binom{2k}{k}. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

(4)において，

$$2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1-k}\binom{2(n-k)}{n-k}\binom{2k}{k}=\binom{2n+2}{n+1} \qquad (*)$$

が証明されれば

$$V(n+1)=4V(n)=4^{n+1}$$

となり題意成立が示される．(*)は次のように変形できる．

$$\sum_{k=0}^{n}2\cdot\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}=\binom{2n+2}{n+1} \qquad (**)$$

(**)の右辺は $P_0$ から $P_{n+1}$ までの最短経路の総数である．左辺は「$P_1$ から $P_k$ まではどの対角線上の点も通らず，$P_{k+1}$ で初めて対角線上の点に達し，残り $P_{n+1}$ までの最短経路の総数」の $0\leqq k\leqq n$ についての総和である．ここに，

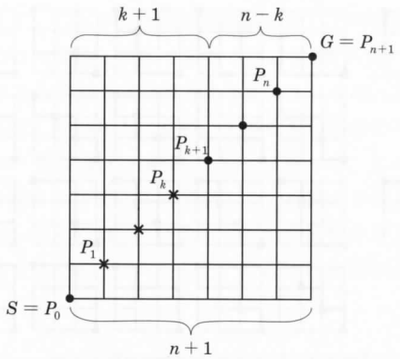



図5

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

は，$n\times n$ のマス目において対角線をまたがない最短経路の総数で，カタラン数として知られている．$(n+1)\times(n+1)$ のマス目とすれば，対角線上の点を一度も通らない最短経路の総数となる． □

**参考文献**

[1] 西山豊，「赤と黒のゲーム必勝法」，『理系への数学』2010年9月号，Vol. 43, No. 9, 22-25.

[にしやま ゆたか／大阪経済大学経営情報学部]



数学セミナー

# 表紙・この1年

2011.4〜2012.3


2011年4月号
特集◉この20年で数学に何が起こったか


2011年5月号
特集◉大学数学が一望できる数学ランドへようこそ(その1)


2011年6月号
特集◉大学数学が一望できる数学ランドへようこそ(その2)


2011年7月号
特集◉数学における分類のこころ


2011年8, 9月号
特集◉名著・大著を読む


2011年10月号
特集◉ガロア生誕200年


2011年11月号
特集◉解いてみよう2011秋


2011年12月号
特集◉シミュレーションの数理


2012年1月号
特集◉「想定外」の数学


2012年2月号
特集◉グレブナー基底の新天地


2012年3月号
特集◉確率で世の中を見る