確率・統計

西山 豊
◉大阪経済大学経営情報学部

高校数学の試験はいつも満点だったという学生が大学数学で挫折するということはよくある．高校の確率はよくわかるが，大学の確率はまったくわからないとよく言われる．なぜそうなのかを，私の苦い経験から説明しよう．

1. カリキュラムを比べてみると

高校数学で学ぶ確率・統計の内容は次のようである．高校1年の「数学A」では「場合の数と確率」の章で順列・組合せ，二項定理，排反事象，余事象，独立な試行，期待値などを学ぶ．高校2年の「数学B」では「統計とコンピュータ」の章で表計算ソフトを使いながら平均値，分散，標準偏差，相関係数などを学ぶ．

高校3年の「数学C」では「確率分布」の章で条件付き確率，事象の独立と従属，確率変数，確率分布などを，「統計処理」の章で正規分布，統計的な推測，母集団や標本について学ぶ．現実社会を生きていくために必要な確率の知識は「数学A」程度で十分であり，「数学C」は高校数学とはいえかなり高度な内容となっている．

小学校，中学校そして高校の教育は，すべて文部科学省による学習指導要領に基づいておこなわれる．教育内容の範囲と難易度が定められ，それに合格した教科書(検定教科書という)にしたがって教育がおこなわれるので，高校によって学ぶ内容が違うということはない．

大学数学にも確率の科目がある．大学の教育は文部科学省の学習指導要領がないので，高校数学のような一律教育ではない．大学によって学ぶ内容が大きく違ってくる．

まず，文科系と理科系で大きく分かれる．文学部の学生には大学の確率の科目は不要であると私は思う．高校数学で十分である．しかし，高校数学すら十分に勉強せずに入学してくることが多いから，文科系の学生には高校数学の教科書で確率を再学習させるケースが多くなっている．

理科系でも工学部，理学部，医学部，薬学部，農学部では学ぶ内容が大きく異なる．大学の確率で「ルベーグ積分」やら「コルモゴロフの確率論」(後述)がすべての理科系の学生に必要かというと，そうではない．医学部や薬学部は大学1～2年生で学ぶ確率・統計の知識で十分ではないだろうか．

『数セミ』読者は数学科を目指している人が多いと思われるので，そういう人たちに合わせたカリキュラムを見ていこう．全国の大学のホームページから，提供するカリキュラムを検索し，確率と関係しそうな科目名を調べてみると次のようになっている．

東京大学理学部は，3年前期に「解析学Ⅳ(ルベーグ測度と積分)」，4年前期に「確率統計学Ⅰ(確率論の基礎)」，「確率統計学Ⅱ(数理統計学の基礎)」とある．京都大学では，全学共通教育科目として「確率論基礎」「数理統計学」が，理学部数学科科目として「確率論」がある．信州大学では，3年に「確率論」「数理統計学」「統計力学」がある．早稲田大学では3年に「測度論」「確率統計概論」，4年に「確率論」「確率過程論Ⅰ」がある．しかし，科目名だけでは確率の内容を判断できない．シラバス(講義計画)を読み，参考文献を見て初めて確率の概要がわかる．

2. 大学1～2年生の確率・統計

科目名としては「確率・統計」「数理統計学」「統計学」などの名称のもので，大学1～2年生向けの確率・統計の講義の概要を見てみよう．そこで使われると思われる教科書の1つ，

蓑谷千凰彦，『統計学入門』(東京図書，2004年)

の目次は次のようになっている．

1. データの記述
2. 確率
3. 確率変数と確率分布
4. 離散確率変数の確率分布(ベルヌーイ試行とベルヌーイ分布，2項分布，ポアッソン分布，幾何分布，パスカル分布)
5. 連続確率変数の確率分布(分布関数と確率密度関数，指数分布，正規分布，大数の法則)
6. 多変数の確率分布(共分散，相関係数)
7. パラメーター推定法と推定量の特性
8. パラメーターの区間推定(t分布，カイ2乗分布，F分布)
9. 仮説検定
10. 回帰分析(最小二乗法，予測)

大学数学で新しく教えられる内容は，ポアッソン分布などの確率分布関数，多変数の確率分布，推定法・検定法，回帰分析などである．相関係数はアンケート調査によるデータ解析でよく用いられ，経済学部や社会学部の学生には必要である．仮説検定は薬効検定にも使われ，薬学部の学生には必要である．また，回帰分析は商品の販売予測にも用いられ，経営学部の学生には必要である．

回帰分析に用いられる最小二乗法は，実績値と理論曲線(直線または二次関数など)との誤差を最小にするため，多変数関数の偏微分をとるところが数学的には面白い．ここで学ぶ確率・統計は，実際の現実のデータを使って確率や統計の計算を行い，大学受験から実社会に目を向けさせようというねらいもある．それで数学科を目指している学生にとっては，やや物足りなく感じるかもしれない．大学数学を甘く見てしまうと，これが大きな落とし穴となる．

3. ルベーグ積分から確率論へ

私の大学時代は1967年～1971年で，高校時代から数学と物理が好きだったので，大学では数学科か物理学科を目指していた．ところが大学数学は高校数学と一変していた．この頃はブルバキ数学の全盛時代で，授業では公理系にもとづく抽象数学がほとんどであった．問題を解くことが主体だった高校数学から，証明が主体の大学数学に変わり，この学習スタイルに愕然とする者が多かったように思う．

カントールの対角線論法，デデキントの切断，実数の濃度，イプシロン・デルタ法によるコーシー－シュワルツの関数の連続性，微分可能性の定義など，公理系にもとづく1～2回生の純粋数学についていくのがやっとのことであった．さらに1969年～1970年は京都大学での大学紛争の影響で，3回生の講義がすべて消滅してしまい，大学機能がマヒした状態で4回生に進級した．

4回生の数学講究(ゼミのようなもの)は十時東生ゼミで，教材としてヒンチンの英語論文，

A. I. Khinchin, *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics*(Dover, 1949)

を用いた．この文献は，後に翻訳されている(ヒンチン，河野繁雄訳，『統計力学の数学的基礎』(東京図書，1971年))．当時の学生は教科書を買う金銭的余裕がなく，ジアゾ式複写機で複製したものを持ち寄り，発表を分担しながら勉強した．指導教授の十時先生は当時エルゴード理論を研究されていて，後に

十時東生，『エルゴード理論入門』(共立出版，1971年)

を出版されている．エルゴード理論は位相(空間)平均と時間平均が等しいという仮説で，気体の分子運動を確率論的に研究する中で生まれた理論である．

エルゴード理論を学ぶためにはコルモゴロフの確率論が必須であり，その前には測度論としてのルベーグ積分が必須である．前述のように大学封鎖で講義が1年間ストップしたので，ルベーグ積分を学ぶ機会を逸してしまった．ルベーグ積分に関する書籍

は，当時は，

伊藤清三，『ルベーグ積分入門』(裳華房，1963年)

しかなく，この本とて高価で買うこともできず，また独学で理解することもできない代物だった．このような事情で，私は大学での確率の講義に完全に脱落してしまった．

ここでルベーグ積分とはどのようなものか，その概略を，

志賀徳造，『ルベーグ積分から確率論』(共立出版，2000年)

の目次から関連する章を取り出してみよう．

1. 集合の長さとルベーグ測度(リーマン積分の復習，1次元集合の長さ，ルベーグ測度，測度空間)
2. ルベーグ積分(可測関数，積分の定義，収束定理，リーマン積分とルベーグ積分)
3. フビニの定理と応用(直積測度，フビニの定理，L^p 空間，関数の合成積)
4. 積分に関する漸近解析(ラプラスの方法，ガンマ関数とスターリングの公式，停留位相の方法)

高校数学であつかう関数は連続で微分可能なものばかりであるが，地震データや株価の変動など，現実のデータは不連続で微分不可能なものばかりである．なめらかな関数だけを対象にしたリーマン積分を，ギザギザの関数を対象として拡張したのがルベーグ積分であるが，これを学問として学ぶには，才能と努力と根気が要求される．卒業後も何度かチャレンジしたが，私はルベーグ積分が理解できなかった．

ルベーグ積分にもとづく確率論の教科書として，

舟木直久，『確率論』(朝倉書店，2004年)

があり，その目次は次のようになっている．

1. 確率論を学ぶにあたって
2. 確率論の基礎概念
3. 条件付き確率と独立性
4. 大数の法則
5. 中心極限定理と少数の法則
6. マルチンゲール
7. マルコフ過程

確率の用語として，確率の σ-加法性，確率変数間の一様可積分性，確率空間の直積，不変分布とエルゴード性，再帰性と非再帰性などがある．この本は東大理学部数学科4年生および大学院生を対象にした講義ノートをもとにしているとあり，実際に目を通してみると，高校数学を学ぶような感じには行かないことがわかる．ただし，将来数学研究者を目指す人は，この科目は必須である．

以上見てきたように，大学で学ぶ確率といっても，1〜2年生で学ぶ確率と3〜4年生で学ぶ確率は，内容はまったく異なり，難易度もずいぶん違うということを記憶しておいてほしい．この違いを理解するために確率論の歴史を概観してみよう．

4. 確率論の歴史

人類は有史以前から賭けごとをしたし，確率的なものの見方をしていたであろうが，初めて数学的な確率の理論の第一歩が踏み出されたのは，17世紀にパスカル(1623-1662)とフェルマー(1601-1665)が，最も簡単なくじ引きやさいころ遊びを考察することによってであると言われている．

事象とその確率，確率変数とその期待値，試行の独立性などの重要な概念が導入され，対象はすべて有限個の可能性の場合で，研究手段は順列，組合せであった．そのため，この時代の確率論は古典的確率論とよばれる．高校数学で学ぶ確率は古典的確率である．

このような研究を踏まえて，ヤコブ・ベルヌーイ(1654-1705)が大数の法則を証明する．大数の法則は，数学的確率と統計的確率の統一をはかろうというものである．そして，ド・モアブル(1667-1754)は中心極限定理を証明した．

18世紀から19世紀にかけては，急速に発展した解析的手法を取り入れて，確率論も著しく進歩した．ユークリッド(紀元前4世紀)の平面幾何の公理的定式化にならって，解析学の基礎を確立しようという気運が生まれ，ラプラス(1749-1827)は確率論の公理化をめざして，加法定理，乗法定理などを明示したが，公理化の範囲はきわめて限られていた．

19世紀の終わりから解析学の公理化が著しく進み，面積，体積の完全な定義が，ブール(1815-1864)，ルベーグ(1875-1941)によって与えられた．これがルベーグ積分となる．同時に，確率が面積，体積と同じ範疇(測度)に属することが認識され，コルモゴロフ(1903-1987)の測度論的確率論が生まれ(1933年)[2]，ラプラスに始まる確率論の公理化問題は終止符を打つことになる．(理学部数学科で学ぶ確率は，この時代のものである)

その後，マンデルブロー(1924-2010)のフラクタル幾何学や，最近ではカオスなど複雑系の研究があるが，これらは確率論をもとに発展した分野であるとみなせる．

5. ランダム・ウォークの問題から

ルベーグ積分による確率論は難しすぎるし，大学1〜2年の確率・統計は物足りない，という学生には，その中間的なものとして，ランダム・ウォークの問題がある[3]．コインの表と裏，トランプの赤色と黒色，進行方向の右と左など2つの選択肢を持つものを1と0で表現し，1と0で構成されるランダムな数の列を研究するのがそれで，ベルヌーイ試行ともいわれる．ランダム・ウォークに関する興味ある問題を示しておこう．

●── (1) ペニーのゲーム

ここに，表と裏が均等に出るコインがある．その

コインを連続して投げて行き，その中で起こりそうな長さが3のパターンをAとBが予想し，自分が選んだパターンが相手より早く現れた方が勝ちということにする．たとえばAは「表表表」を，Bは「裏表表」を選択したとする．コインの表をHeadのH，裏をTailのTで表すと，AはHHHを選択し，BはTHHを選択することになる．そして，コインを連続して投げて

HTHTHHHHTHHHTTTTHTHH…

のような並びの中から，HHHとTHHが早く出てきた方が勝ちとなる．

コインの表と裏は $\frac{1}{2}$ の等確率である．3連の並び方は全部で $2^3=8$ 通りあり，これら8通りはどれも $\frac{1}{8}$ の確率で出現するから，AとBがどれを選んでも公平なように思えるが，HHHとTHHでは後者が前者の7倍もの勝算がある．Aの選択に対して，Bが下表のように選択すれば，どの場合もBの勝算がAより大きくなる．このことを読者は信じられようか？（西山豊，「確率のパラドックス」，『理系への数学』2010年3月号を参照のこと）

表　Bの勝算

Aの選択	Bの選択	Bの勝算（Aに対する）
HHH	THH	7倍
HHT	THH	3倍
HTH	HHT	2倍
HTT	HHT	2倍
THH	TTH	2倍
THT	TTH	2倍
TTH	HTT	3倍
TTT	HTT	7倍

◉──(2)　赤か黒かを当てるゲームで86%の勝率

トランプは赤色が26枚，黒色が26枚の合計52枚であるが，カードをよくシャッフルして裏向けにして机の上に置き，赤色か黒色かを二人で当てるゲームを考える．確率で考えると，まったく当たらない場合(0枚)と，全部当たる場合(52枚)を両極端として，平均して26枚が当たる，つまり正規分布に従うことが予想される．

赤色か黒色かの推定の仕方をちょっと工夫すれば，平均の26枚どころか30枚を当てることが可能であるという．この推定法では，でたらめに赤と黒を言う相手に対して，勝率が86%のゲームになることが証明されている．一体，どういう作戦なのか．（西山豊，「赤と黒のゲーム必勝法」，『理系への数学』2010年9月号を参照のこと）

◉──(3)　トランプで同じ数字が並ぶ確率

トランプでゲームをする場合はランダムの度合いが常に問題となる．十分にシャッフルできているかをチェックする方法として，同じ数字が並んでいないかがひとつの目安である．ところが，確率の計算をしてみると，数字が並ぶ確率は約95%という高確率であることがわかる．したがって，重なる数字がないようになるまでシャッフルを繰り返すなど，神経質にならなくてもよいという結論になる．（西山豊，「トランプで同じ数字が重なる確率」，『理系への数学』2011年7月号を参照のこと）

参考文献

［1］ I.トドハンター，安藤洋美訳，『確率論史：パスカルからラプラスの時代までの数学史の一断面』，現代数学社，2002年．

［2］ A.N.コルモゴロフ，坂本實訳，『確率論の基礎概念』，ちくま学芸文庫，2010年．

［3］ F.フェラー，河田龍夫監訳，『確率論とその応用(I上・下，II上・下)』，紀伊國屋書店，1960年．

［4］ 伊藤清，『確率論と私』，岩波書店，2010年．

［にしやま ゆたか］

幾何って図形の勉強？

牛瀧文宏
◉京都産業大学理学部

思い出話

大学の数学科に入学したとき，たしか最初の微積の授業で実数論の講義があった．難しい実数論の内容だった．「定義からきちんと理解できることは大切ですが，絵を描いて幾何的にイメージできるようにもなってください」．古い記憶で不正確なところもあろうが，たしか，講義中のO教授はそんなことを口にされ，実数を表す数直線を描かれた．

実は，筆者が大学に入学したのは，もう30年以上も前だ．筆者も老年に近づいたため，最近のことより昔のことばかり覚えているのかもしれない．しかし，数直線を幾何的として話されたことへの違和感が強烈にあったのは疑いない．

「幾何」と聞くと，高校生で数学好きの諸君や大学初年の諸君なら，まずは「初等幾何」をイメージすると思う．そう，平面図形や立体図形の証明や計量問題を中心とした，中学校や高校の「数学A」で学習した事柄だ．「三角比」もここに入れてもいいだろう．もちろん，これ以外にも図形に関係する学習は中高にある．「数学II」で学習した「図形と方程式」のような「解析幾何」や，「数学B」で学習した「ベクトル」だ．高校生の中には，これらは「座標」や「ベクトル」であって，「幾何」と捉えていない人もいるかもしれない．中高一貫校などでは，中学校の数学を「代数」と「幾何」に大別して，2科目を併行して授業するようなので，もし仮にこの種のことを経験して来たなら，「幾何 = 初等幾何」のイメージが浸透していても致し方ない．しかし，座標やベクトルを使って図形の性質を調べたり，問題解決に結びつけるのも立派な幾何だ．実際，昭和53年の高等学校の学習指導要領の改訂(昭和57年(1982年)施行)のときには，「代数・幾何」という科目が数学の中にあり，そこでは「ベクトル」や「行列」，それに「二次曲線」や「空間内の直線」と「平面の方程式」まで入っていた．

大学で最初に出会う幾何は行列式かも

ベクトルや行列が幾何の対象なら，その高校の学習の先にある線形代数学の中に，幾何的な要素を見ることができるのは言うまでもない．ただ，高校の数学では扱う空間の次元が3以下なので，ベクトルが幾何の対象として完全な実態を伴うが，一般の n 次元で議論を展開する線形代数学にあっては，ベクトルを図形的直観と結び付けることは容易ではない．もちろんここは，いったんは幾何的なイメージから離れた自由な感覚で理解しておくことが大切で，その結果，数学における抽象化のよさや構造の考え方がわかることになるのだと思う．そして，今度はその力が高次元の幾何学を理解する礎となるのだろう．

だがもちろん，幾何的な内容で最初から手に届くものもある．そのひとつが行列式とその応用だ．2次正方行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ に対して，$|A|$ や $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ で表わされる2次の行列式が $ad-bc$ で定義される．「行列式」という言葉こそ出てこないが，高校のときには ΔA と書き表わして既に使っていたはずだ．すなわち，読者諸氏は行列 A が逆行列を持つための必要十分条件が $|A|\neq 0$ であることはご存じだろうし，$|A|$ の絶対値が2本のベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}$ とを2辺とする平行四辺形の面積であることもご存じかもしれない．実はこれと同様の性質を持つ「n 次の行列式」といわれるものが，3以上の整数 n に対して定義され，新入生諸君が学習する線形